Инновационные педагогические технологии в образовании
Innovative Pedagogical Technologies in Education

Научная статья
УДК 373
DOI: 10.25688/2072-9014.2023.66.4.07

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Екатерина Николаевна Бажанова[1],
Ольга Васильевна Кирюшкина[2],
Ирина Олеговна Ковпак[3],
Виктор Семенович Корнилов[4] ✉,
Татьяна Владимировна Михрина[5],
Андрей Владимирович Ушаков[6]

[1, 2, 3, 4, 5, 6] Московский городской педагогический университет, Москва, Россия

[1] bazhanovaen@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7714-0579
[2] kiryushkinaov@mgpu.ru
[3] kovpakio@mgpu.ru
[4] kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921
[5] mikhrinatv@mgpu.ru
[6] ushakovav@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0002-7665-2086

Аннотация. Статья посвящена олимпиадам школьников по математике и роли таких олимпиад в развитии познавательной активности учащихся. Подчеркивается, что проведение подобных математических олимпиад позволяет найти будущих талантливых молодых исследователей. В статье приводятся исторические сведения о математических олимпиадах, проводимых в России. Для наглядности рассматриваются задачи трех типов олимпиад, организованных на базе высших учебных заведений. Отмечается, что Московский городской педагогический университет

много лет подряд принимает активное участие в проведении Объединенной межвузовской математической олимпиады (ОММО) школьников и предоставляет свою площадку для этого мероприятия.

Ключевые слова: олимпиады по математике; познавательная активность школьников; уровни олимпиадных задач; структура олимпиадных задач.

Original article
UDC 378
DOI: 10.25688/2072-9014.2023.66.4.07

MATHEMATICAL OLYMPIADS AS A MEANS OF DEVELOPING COGNITIVE ACTIVITY OF SCHOOLCHILDREN

Ekaterina N. Bazhanova[1]**,**
Olga V. Kiryushkina[2]**,**
Irina O. Kovpak[3]**,**
Viktor S. Kornilov[4] ✉**,**
Tatiana V. Mikhrina[5]**,**
Andrey V. Ushakov[6]

[1, 2, 3, 4, 5, 6] Moscow City University,
Moscow, Russia

[1] bazhanovaen@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7714-0579
[2] kiryushkinaov@mgpu.ru
[3] kovpakio@mgpu.ru
[4] kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921
[5] mikhrinatv@mgpu.ru
[6] ushakovav@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0002-7665-2086

Abstract. The article is devoted to the Olympiads of schoolchildren in mathematics and the role of such Olympiads in the development of cognitive activity of students. It is emphasized that holding such mathematical Olympiads makes it possible to find future talented young researchers. The article provides historical information about mathematical Olympiads held in Russia. For clarity, the tasks of three types of Olympiads organized on the basis of higher educational institutions are considered. It is noted that the Moscow City University has been actively involved in the United Interuniversity Mathematical Olympiad of Schoolchildren (OMMO) for many years in a row and provides its own platform for this event.

Keywords: math olympiads; cognitive activity of schoolchildren; levels of olympiad tasks; structure of olympiad tasks.

Для цитирования: Математические олимпиады как средство развития познавательной активности школьников / Е. Н. Бажанова [и др.] // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». 2023. № 4 (66). С. 78–93.

For citation: Mathematical olympiads as a means of developing cognitive activity of schoolchildren / E. N. Bazhanova [et al.] // MCU Journal of Informatics and Informatization of Education. 2023. № 4 (66). P. 78–93.

Введение

Многогранность и неисчерпаемость математики позволяет ей вторгаться во все сферы деятельности человека. Эпитетом «математический» награждается практически любая дисциплина. Не удивляет, например, математическая биология, математическая лингвистика, математическая психология. Математика распространяется и вширь, и вглубь, растет потребность в ее необъятных возможностях и их использовании [1–10]. А значит, необходим человек, способный делать математические открытия, строить модели, которые помогут в изучении все новых и новых объектов.

Серьезных успехов в такой деятельности можно достичь, вовлекаясь в исследовательскую творческую работу со школьной скамьи. Для вовлечения в творческую научную деятельность школьников проводятся множество интеллектуальных соревнований, среди которых особую роль играют математические олимпиады. Организация таких испытаний позволяет найти и не потерять будущих талантливых молодых исследователей, участники получают бонус для поступления в выбранное высшее учебное заведение.

Личные и командные математические соревнования позволяют зажечь энтузиазм, повысить уверенность в своих силах, увлечь более глубоким изучением предмета, а также формируют понимание необходимости упорного труда для достижения желаемых результатов. Участие в интеллектуальных соревнованиях расширяет круг общения одаренного школьника с интересными людьми, способствует определению жизненного выбора.

История многих математических олимпиад России насчитывает уже почти век. В начале 1930-х годов последовательно стартовали сначала Ленинградская математическая олимпиада, а затем и Московская математическая олимпиада. Появилось много наследников этих олимпиад, например Турнир городов. В настоящее время количество различных математических соревнований в стране исчисляется уже многими десятками и к ним привлекаются обучающиеся всех возрастов, а не только старшеклассники. Разнообразны и виды проведения соревнований, огромную популярность вызывают дистанционные мероприятия. Развитие соревновательного математического движения перестраивает и работу образовательных учреждений, растет количество различных кружков, факультативов для подготовки, проводятся предметные конференции. Задача найти и воспитать талантливых ученых реализуется всесторонне.

Методы исследования

Участие в олимпиадах — мощный мотивационный инструмент для школьника, особенно если у него получается достичь положительного результата. В то же время многие обучающиеся боятся олимпиад, считая их очень сложными, по силам только гению. Но каждая олимпиада содержит вполне доступные задачи. Многие соревнования активно выполняют роль популяризации предмета.

Интересно организован отмечающий в этом году десятилетний юбилей математический флешмоб MathCat, площадкой проведения которого традиционно является ИЦО МГПУ. Это не просто математическая олимпиада, а праздник и для взрослых, и для детей, когда можно вместе с родителями или индивидуально порешать задачки любого из четырех предложенных уровней сложности, ощутить дух соперничества и свободы. Добиться результата на региональном или заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике действительно очень сложно, но важно не отступать перед трудностями. Выбор олимпиад огромен, некоторые их них могут быть альтернативой даже ЕГЭ.

Ежегодно Министерство науки и высшего образования Российской Федерации по согласованию с Министерством просвещения Российской Федерации составляет перечень олимпиад, результат участия в которых может дать возможность поступления в вуз на бюджет. В 2023/2024 учебном году перечень включает 87 олимпиад, которым присваивается один из трех уровней. Состязаний первого уровня немного, к ним относятся Турнир городов, олимпиада школьников «Ломоносов». Обладателей дипломов такой олимпиады зачисляют на направление по профилю олимпиады без вступительных экзаменов или начисляют 100 баллов за предмет профильной олимпиады. Однако подтвердить диплом нужно результатом ЕГЭ по предмету, равным не менее чем 75 баллам. Сотни вузов предоставляют такие льготы и призерам олимпиад второго уровня.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада школьников, площадкой проведения которой является Институт цифрового образования (ИЦО) МГПУ, и отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» уже много лет определяются как олимпиады второго уровня. Часто призерам этих олимпиад вузы добавляют к личным достижениям от 1 до 10 баллов или повышают результат ЕГЭ до 85–90 баллов. Нередко вузы определяют льготу и за дипломы олимпиад третьего уровня. Имеет смысл принимать участие в олимпиадах в 7-м и 8-м классах. Призовой результат может принести льготу при поступлении и в этом случае.

Важно понимать, что каждое учебное заведение разрабатывает свои внутренние правила по предоставлению льгот за дипломы олимпиад второго и третьего уровней. Участие в соревнованиях школьников среднего звена позволяет им раньше почувствовать свои силы в применении стандартных и нестандартных приемов решения задач, ощутить необходимость более глубокого изучения предмета, подготовиться к серьезным в старшей школе.

Результаты исследования

Рассмотрим подробнее задачи трех типов олимпиад, проводимых на базе высших учебных заведений.

Проект MathCat (mathcat.info) не является в полной мере олимпиадой — это скорее математический праздник, основная функция которого — популяризация математических знаний, формирование у участников позитивного и творческого интереса к решению нестандартных математических задач. Инициативным центром MathCat стал саратовский Лицей-интернат естественных наук (ЛИЕН), который начиная с 2014 года объединяет и организует площадки проведения таких математических праздников. Например, в MathCat-2022 приняли участие 43 282 человека на 538 площадках в вузах, школах, колледжах и центрах дополнительного образования России, Белорусии, Монголии и Черногории, а также в системе Mathcat.Online.

Начиная с 2015 года МГПУ так же становится традиционной площадкой проведения этого праздника. Важной содержательной особенностью MathCat является разработка сборной программной комиссией проекта вариантов задач четырех уровней сложности.

Задачи «белого» варианта доступны школьникам от 6-го класса и взрослым, деятельность которых не связана с математикой, но проявляющим интерес к занимательным логическим задачам и математическим ребусам. «Зеленый» вариант содержит нестандартные математические задачи среднего уровня сложности, этот вариант интересен школьникам старших классов, студентам и взрослым с техническим образованием. В «желтом» и «красном» вариантах представлены полноценные олимпиадные задачи сложного и очень сложного уровня соответственно.

Благодаря такой организации работы праздник охватывает большое количество участников, на него приходят решать задачи родители и дети, ученики и учителя, студенты и просто любители математики разных возрастов и разного уровня подготовки.

Приведем пример задачи «зеленого» уровня.

Задача 1 (13 баллов, 2022 г.). В верном арифметическом равенстве в левой части одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — различными. Получилось: $(М + А – Т – Н) \cdot (К + А + Т) = 2022$. Восстановите исходное равенство. Укажите все возможные варианты.

Ответ: $(8 + 329) \cdot (1 + 3 + 2)$ или $(9 + 328) \cdot (1 + 3 + 2)$.

Решение. Разложим на простые множители $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Поскольку в одной скобке сумма трех однозначных чисел, то этот множитель либо однозначное число, либо двузначное. Но в разложении на множители числа 2022 получить двузначный множитель нельзя, поэтому К + А + Т — однозначное число. Значит, это либо 3, либо 6 (2 получить не получится, так как минимальная сумма трех однозначных чисел равна 3 (= 0 + 1 + 2). Но если это 3, то второй множитель — 674, который получается в результате суммы трехзначного числа и однозначного. Это значит, что в любом случае А = 6, но такой цифры среди значений букв К, А, Т нет. Значит, К + А + Т = 6. Тогда во второй скобке в сумме получается 337 и А = 3. Отсюда Т = 2 (так как при суммировании с однозначным числом нельзя получить в десятках цифру, отличающуюся от исходной более чем на 1), К = 1. Таким образом получаем два варианта: $(8 + 329) \cdot (1 + 3 + 2)$ или $(9 + 328) \cdot (1 + 3 + 2)$.

Эта задача представляет собой математический ребус, при решении которого следует опираться на свойства делимости чисел. Сложность задачи заключается еще и в том, что она имеет два различных решения. Участник, решивший эту задачу подбором (что тоже допустимо), получит за нее неполное число баллов, так как либо не найдет второго решения, либо не даст обоснование того, что других решений нет. Теперь рассмотрим задачу «желтого» уровня:

Задача 2 (5 баллов, 2018 г.). В турнире по футболу приняли участие 19 команд с названиями «Спартак», «Динамо», «Локомотив» и «Торпедо» из 5 разных городов. Любые две команды или из разных городов, или имеют разные названия. В течение турнира не играли между собой команды одного названия, а также не играли между собой команды из одного города. Сколько игр было в турнире?

Ответ: 108.

Решение. Если бы в каждом городе были все 4 клуба, то было бы $5 \cdot 4 = 20$ команд. Добавим недостающую, 20-ю команду. Тогда каждая команда сыграет с 3 командами из каждого из 4 других городов, то есть $4 \cdot 3 = 12$ игр. Значит, будет $20 \cdot 4 \cdot 3 : 2 = 120$ игр (деление на 2, потому что каждая игра учитывается дважды).

Значит, без одной команды пройдет $120 - 12 = 108$ игр.

Логическая задача на соответствия, для успешного решения которой следует дополнить условие еще одной командой и, после подсчета количества игр, учесть в этой сумме игры несуществующей команды.

В качестве примера задачи «красного» уровня рассмотрим нестандартную задачу на составление уравнения с двумя неизвестными, в котором следует учесть, что на каждой из х станций продают $(x - 1)$ билет до всех остальных станций (итого $x \cdot (x - 1)$ билетов), а затем учесть разность между новым и старым количеством билетов.

Задача 3 (10 баллов, 2017 г.). Каждая станция детской железной дороги продает билеты до всех остальных станций, все эти билеты различны, на каждом указано название начальной и конечной станции. После того как на этой дороге построили несколько (более одной) новых станций, пришлось допечатать 46 новых видов билетов. Сколько всего станций теперь действует на детской железной дороге?

Ответ: 13

Решение. Если было x станций, а стало y, то теперь нужно $y\ (y - 1)$ билетов, а раньше было нужно $x \cdot (x - 1)$. По условию $y \cdot (y - 1) - x \cdot (x - 1) = 46$, то есть $(y - x) \cdot (y + x - 1) = 46$. Отсюда $y - x = 2$ и $x + y = 24$. Соответственно, $y = 13$ и $x = 11$.

Далее рассмотрим задачи двух олимпиад второго уровня. Обе олимпиады дают победителям льготы для поступления в вуз, а различие их заключается в том, что ОММО поддерживают институты и университеты разного профиля, а олимпиада школьников «Росатом» является отраслевой и нацелена на выявление способных учеников, ориентированных на инженерно-технические специальности.

Московский городской педагогические университет много лет подряд принимает активное участие в проведении объединенной межвузовской математической олимпиады школьников ОММО и представляет свою площадку для этого мероприятия. Организатором ОММО выступает Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО).

В перечне олимпиад, утвержденном Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, ОММО имеет второй уровень, и ее дипломы могут официально учитываться при приеме в вузы. Олимпиада проводится в два тура: первый, отборочный тур — заочный, второй, основной тур — очный. К участию в первом туре допускаются учащиеся, осваивающие общеобразовательные программы основного и среднего (полного) общего образования, независимо от места учебы и жительства. При регистрации участники первого тура выбирают один из вузов-участников, в котором они будут выполнять задания второго тура. На второй тур приглашаются победители и призеры первого тура. Местный организационный комитет и методическая комиссия формируются из числа преподавателей департамента математики и физики ИЦО МГПУ. В их обязанности входит: подготовка задач для олимпиады, экспертиза заданий от вузов-партнеров, проведение очного тура, внешний контроль за мероприятием на одной из площадок, проверка работ участников.

Далее приведена примерная структура заданий второго тура олимпиады.

1. Теория чисел: арифметическая и геометрическая прогрессии; делимость целых чисел; полные квадраты, кубы и т. п.

2. Задача на рассуждения и логику: «какие из утверждений верны», «оценка с примером ее достижения», «необходимые и достаточные условия» и т. п.

3. Текстовая задача на построение математической модели: задача на оптимальный выбор, движение, работу, смеси и т. п.

4. Несложная планиметрия с вычислением площади, величины угла, длины, скалярного произведения векторов, отношения отрезков, тригонометрических функций углов и т. п.

5. Алгебраическое уравнение, неравенство, их система или совокупность (без тригонометрии и параметра): полиномиальные, рациональные, с модулями, с радикалами, показательные и логарифмические.

6. Тригонометрия: тригонометрическое уравнение, неравенство, их система или совокупность; задачи на обратные тригонометрические функции.

7. Задача с параметром: анализ расположения корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра, геометрический метод решения, использование различных свойств функций, анализ области допустимых значений и т. п.

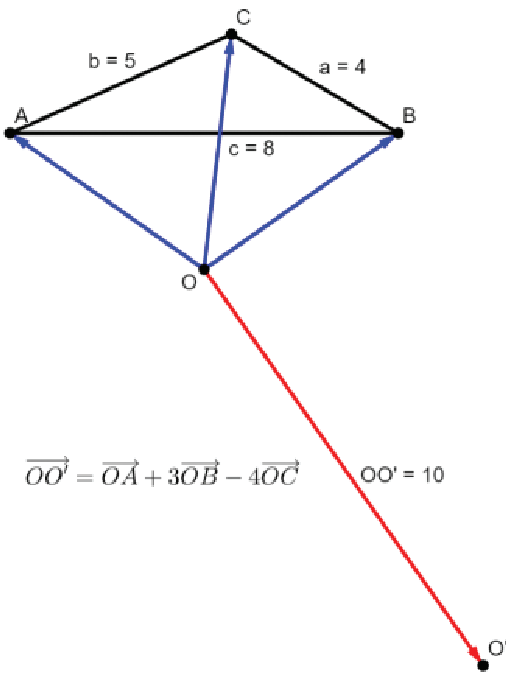
8. Планиметрия более сложная с обязательным доказательством или стереометрия.

9. Задача про функции: задачи на общие свойства функций, функциональные уравнения и неравенства, задачи на производную функции, задачи про непрерывные функции и т. п.

10. Олимпиадная задача (без геометрии): различные олимпиадные идеи, такие как комбинаторика, принцип Дирихле и т. п.; метод математической индукции (без доказательства тождеств или делимостей) и т. п.

Члены методической комиссии МГПУ традиционно составляют задачи на позиции 4 и 8. Приведем примеры таких задач, которые в разные годы предлагались на очном туре олимпиады.

Задача на позицию 4. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC со сторонами $AB = 8$ и $AC = 5$. Найдите сторону BC, если длина вектора $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}$ равна 10 (рис. 1).



Источник: подготовлено авторами.

Рис. 1. Задача на позицию 4

Решение. Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда для любых чисел x, y, z справедливо равенство:

$$(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})^2 = x^2OA^2+y^2OB^2+z^2OC^2+2xy(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})+$$
$$+2xz(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})+2yz(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})=(x^2+y^2+z^2)R^2+xy(OA^2+OB^2-AB^2)+$$
$$+xz(OA^2+OC^2-AC^2)+yz(OB^2+OC^2-BC^2)=$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz)R^2 - xyAB^2 - xzAC^2 - yzBC^2 =$$
$$= (x + y + z)^2 R^2 - xyAB^2 - xzAC^2 - yzBC^2.$$

Если $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}$, то при $x = 1$, $y = 3$, $z = -4$ получим, что

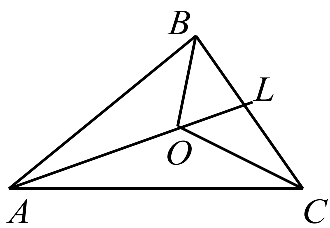
$$OO'^2 = (\overrightarrow{OO'})^2 = -3AB^2 + 4AC^2 + 12BC^2,$$

откуда

$$BC^2 = \frac{1}{12}(OO'^2 + 3AB^2 - 4AC^2) = 16 \text{ и } BC = 4.$$

Ответ: 4.

Задача на позицию 8. В треугольнике ABC сторона $AB = 40$. Центр O вписанной в треугольник окружности делит биссектрису AL в отношении 5 : 3, считая от вершины. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус вписанной в него окружности равен 15 см (рис. 2).



Источник: подготовлено авторами.

Рис. 2. Задача на позицию 8

Решение:

1. Заметив, что BO является биссектрисой в треугольнике ABL, в силу свойства биссектрисы треугольника имеем:

$$AB : BL = AO : OL = 5 : 3,$$

откуда $BL = 24$.

2.

$$AB \times BL \times \sin \angle B = 2S_{\Delta ABL} = 2S_{\Delta AOB} + 2S_{\Delta BOL} = AB \times r + BL \times r = (AB + BL) \times r,$$

где r есть радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Таким образом,

$$40 \times 24 \times \sin \angle B = 960 = (40 + 24) \times 15,$$

откуда $\sin \angle B = 1$ и $\angle B = 90^0$.

3. В силу свойства биссектрисы CO треугольника CLA имеем

$$AC : CL = AO : OL = 5 : 3.$$

Полагая $CL = 3x$, имеем $AC = 5x$.

4. В силу теоремы Пифагора:

$$BC^2 + AB^2 = AC^2, \text{ или } 40^2 + (24 + 3x)^2 = (5x)^2,$$

откуда $x = 17$, $R = AC / 2 = 5x / 2 = 42{,}5$, где R есть радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Ответ: 42,5.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» входит в перечень олимпиад школьников и проводится среди учащихся 7–11-х классов по математике и по физике. Олимпиады по каждому из этих предметов независимы: можно участвовать как в обеих, так и в любой по выбору.

Основной целью олимпиады «Росатом» является выявление одаренных школьников, ориентированных на инженерно-технические специальности, способных к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляющих интерес к вопросам ядерной энергетики и высоких технологий [1]. Таким образом, данная олимпиада предназначена для формирования кадрового резерва атомной отрасли Российской Федерации.

Олимпиада «Росатом» организуется Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» совместно с Государственной корпорацией по атомной энергии «Росатом», соорганизаторами выступают высшие учебные заведения, вступившие в ассоциацию «Консорциум опорных вузов Госкорпорации “Росатом”».

Проводится олимпиада в два этапа: отборочный (октябрь – январь, очно или дистанционно) и заключительный (февраль – март, очно). Отборочный этап олимпиады осуществляется в разных форматах: очный отборочный тур в МИФИ; очные отборочные туры на региональных площадках; очно-заочные отборочные туры на региональных площадках; дистанционный отборочный тур. Принимать участие можно в любых отборочных турах, при этом засчитывается лучший результат. На заключительный этап олимпиады проходят не более 45 % участников отборочного этапа. Заключительный этап проводится в очной форме в Москве и регионах.

Оргкомитет отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом» установил следующие критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады по математике в 2022/2023 учебном году (табл. 1).

Таблица 1

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады по математике в 2022/2023 учебном году (в баллах)

Степень диплома	7-й класс	8-й класс	9-й класс	10-й класс	11-й класс
1-я степень	≥ 7,5	≥ 8	≥ 9	≥ 7,5	≥ 10,5
2-я степень	7	7,5	8–8,5	6,5–7	9,5–10
3-я степень	5	5	7–7,5	4–6	8–9

Победителями олимпиады считаются участники, награжденные дипломами 1-й степени; призерами — участники, награжденные дипломами 2-й и 3-й степени. Количество победителей олимпиады может составлять не более 8 % от общей численности участников заключительного тура, а общее количество победителей и призеров — не более 25 % от числа участников заключительного тура олимпиады (для учащихся 11-х классов — не более 300 человек).

Приведем примеры задач физико-математической олимпиады школьников «Росатом» по математике.

Задача 1 (2022/2023 учебный год, заключительный тур, 11-й класс, вариант № 2). Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(29) = P(37) = 2022$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

Решение. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

Найдем наименьшее возможное значение $P(0) = a_0 > 0.$

Так как

$$P(k) - a_0 = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k \vdots k,$$

то $P(k) - a_0 \vdots k$ для любого $k \in \mathbb{Z}.$

Отсюда и из условия $P(29) = P(37) = 2022$ имеем:

$$P(29) - a_0 = 2022 - a_0 \vdots 29 \text{ и } P(37) - a_0 = 2022 - a_0 \vdots 37.$$

Учитывая, что 29 и 37 — простые числа, по свойствам делимости получим:

$$2022 - a_0 \vdots 29 \cdot 37 = 1073,$$

т. е. найдется $q \in \mathbb{Z},$ такое, что $2022 - a_0 = 1073 \cdot q.$

Тогда значение $a_0 = 2022 - 1073 \cdot q$ будет наименьшим при наибольшем значении $q,\ q \in \mathbb{Z}.$

Найдем наибольшее $q \in \mathbb{Z},$ такое, что $a_0 = 2022 - 1073 \cdot q > 0$:

$$-1073 \cdot q > -2022,\ q < \frac{2022}{1073} = 1\frac{949}{1073},$$

отсюда $q = 1$.

Поэтому

$$a_0 = 2022 - 1073 \cdot 1 = 2022 - 1073 = 949.$$

Ответ: 949.

Задача 2 (2022/2023 учебный год, отборочный тур, 10-й класс, вариант № 2).

Вычислить значение произведения:

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{200^3 - 1}{200^3 + 1}.$$

Решение. Разложим разности кубов в числителе и знаменателе на множители:

$$\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(200-1)(200^2+200+1)}{(200+1)(200^2-200+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot(2^2+2+1)}{3\cdot(2^2-2+1)}\cdot\frac{2\cdot(3^2+3+1)}{4\cdot(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{199\cdot(200^2+200+1)}{201\cdot(200^2-200+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot199}{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot201}\cdot\frac{(2^2+2+1)\cdot(3^2+3+1)}{(2^2-2+1)\cdot(3^2-3+1)}\cdot\ldots\cdot\frac{(200^2+200+1)}{(200^2-200+1)}.$$

Так как при любых натуральных n ($n > 1$) выполнено равенство

$$(n-1)^2+(n-1)+1=n^2-n+1,$$

то сомножители числителя и знаменателя сокращаются.

Таким образом, получаем:

$$\frac{1\cdot2}{200\cdot201}\cdot\frac{(200^2+200+1)}{(2^2-2+1)}=\frac{2\cdot(200^2+200+1)}{3\cdot200\cdot201}=\frac{40\ 201}{60\ 300}.$$

Ответ: $\frac{40\ 201}{60\ 300}$.

Задача 3 (2022/2023 учебный год, отборочный тур, 11-й класс, комплект № 1, вариант № 2).

Сколько решений имеет уравнение

$$(\sin x-\cos 2x+\sin 3x)^2=\sin^2 x-\cos^2 2x+\sin^2 3x$$

на отрезке $[0; 20\pi]$?

Решение:

$$(\sin x-\cos 2x+\sin 3x)^2-\sin^2 x=-\cos^2 2x+\sin^2 3x.$$

$$(\sin x-\cos 2x+\sin 3x-\sin x)(\sin x-\cos 2x+\sin 3x+\sin x)=$$
$$=(\sin 3x-\cos 2x)(\sin 3x+\cos 2x).$$

$$(\sin 3x-\cos 2x)(2\sin x-\cos 2x+\sin 3x)=$$
$$=(\sin 3x-\cos 2x)(\sin 3x+\cos 2x).$$

$$(\sin 3x-\cos 2x)(2\sin x-\cos 2x+\sin 3x)-$$
$$-(\sin 3x-\cos 2x)(\sin 3x+\cos 2x)=0.$$

$$(\sin 3x-\cos 2x)(2\sin x-\cos 2x+\sin 3x-\sin 3x-\cos 2x)=0.$$

$$(\sin 3x-\cos 2x)(\sin x-\cos 2x)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x-\cos 2x=0,\\ \sin x-\cos 2x=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=\cos 2x,\\ \sin x=\cos 2x.\end{array}\right.$$

Решим уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos 2x$:

$$\left[\begin{array}{l}2x=\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2\pi n,\ n\in Z,\\ 2x=-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2\pi m,\ m\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}-2\pi m,\ m\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z.$$

На отрезке [0; 20π] содержится 50 решений:

$$0\le\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z.$$

$$-\pi\le 4\pi n\le 199\pi,\ n\in Z.$$

$$0\le n\le 49,\ n\in Z.$$

Решим уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x$:

$$\left[\begin{array}{l}2x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\pi l,\ l\in Z,\\ 2x=-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l,\ l\in Z,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l,\ l\in Z.$$

На отрезке [0; 20π] содержится 30 решений:

$$0\le\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l\le 20\pi,\ l\in Z.$$

$$-\pi\le 4\pi l\le 199\pi,\ l\in Z.$$

$$0\le l\le 29,\ l\in Z.$$

Найдем, какие из найденных решений первого и второго уравнений совпадают:

$$n,\ l \in Z\ \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi l \Rightarrow n = \frac{1}{6} + \frac{5}{3} l \Rightarrow \text{ совпадений нет.}$$

Таким образом, общее число решений исходного уравнения равно

$$50 + 30 = 80.$$

Ответ: 80 решений.

Заключение

Содержание олимпиадных задач, безусловно, отличается от тех, что предложены в школьных учебниках. Некоторые из них решаются и без особых знаний предмета, но при хорошей логике рассуждений, а некоторые требуют твердых и глубоких знаний и большого труда. Олимпиадные задачи обладают богатым математическим содержанием, позволяющим заинтересованным обучающимся воспринимать математику живой и привлекательной. Достижение хороших результатов в различных олимпиадах может обеспечить льготы при поступлении в вуз, что еще больше привлекает школьников к серьезному изучению предмета. А подготовка учащихся к участию в олимпиадах повышает уровень преподавания математики в школе.

Список источников

1. Бажанова Е. Н. Теория чисел: методические. рекомендации для самостоятельной работы студентов педагогических вузов / Е. Н. Бажанова. М.: МГПУ, 2015. 68 с.
2. Бажанова Е. Н. Ассоциативные алгебры с делением: учебное пособие для студентов педагогических университетов / Е. Н. Бажанова. М.: Спутник +, 2017. 66 с.
3. Башмаков М. И. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников / М. И. Башмаков. М.: Дрофа, 2010. 297 с.
4. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. М.: Изд-во МЦНМО, 2023. 559 с.
5. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. М.: МЦНМО, 2008. 96 с.
6. Кирюшкина О. В. Интерактивные задачи на платформе Teacher Desmos как средство активизации самостоятельной работы учащихся при обучении математике в условиях дистанта / О. В. Кирюшкина // Академия педагогических знаний. 2020. № 39. С. 122– 125.
7. Кирюшкина О. В. Опыт сюжетной геймификации при обучении алгебре / О. В. Кирюшкина // Образовательный альманах. 2020. № 5 (31). С. 65–66.
8. Михрина Т. В. Элементы логики на уроках математики / Т. В. Михрина // Академия педагогических знаний. 2023. № 80–6. С. 84–90.
9. Ушаков А. В. Об изучении свойств кривых линий инверсии в педагогическом вузе / А. В. Ушаков // Современное педагогическое образование. 2020. № 2. С. 58–63.

10. Ушаков А. В. Из опыта преподавания курса топологии в педагогическом вузе / А. В. Ушаков // Современное педагогическое образование. 2020. № 6. С. 29–36.

References

1. Bazhanova E. N. Number theory: methodological recommendations for independent work of students of pedagogical universities / E. N. Bazhanova. M.: MSPU, 2015. 68 p

2. Bazhanova E. N. Associative algebras with division: textbook for students of pedagogical universities / E. N. Bazhanova. M.: Sputnik +, 2017. 66 p.

3. Bashmakov M. I. Mathematics in the pocket of “Kangaroo”. International Olympiads of schoolchildren / M. I. Bashmakov. M.: Bustard, 2010. 297 p.

4. Gorbachev N. V. Collection of Olympiad problems in mathematics / N. V. Gorbachev. M.: ICNMO Publishing House, 2023. 559 p.

5. Kanel-Belov A. Ya. How to solve non-standard problems / A. Ya. Kanel-Belov, A. K. Kovalji. M.: ICNMO, 2008. 96 p.

6. Kiryushkina O. V. Interactive tasks on the Teacher Desmos platform as a means of activating students’ independent work when teaching mathematics in a distance learning environment / O. V. Kiryushkina // Academy of Pedagogical Knowledge. 2020. № 39. P. 122–125.

7. Kiryushkina O. V. Experience of plot gamification in teaching algebra / O. V. Kiryushkina // Educational Almanac. 2020. № 5 (31). P. 65–66.

8. Mikhrina T. V. Elements of logic in mathematics lessons / T. V. Mikhrina // Academy of Pedagogical Knowledge. 2023. № 80–6. P. 84–90.

9. Ushakov A. V. On the study of the properties of inversion curves in a pedagogical university / A. V. Ushakov // Modern Pedagogical Education. 2020. № 2. P. 58–63.

10. Ushakov A. V. From the experience of teaching a course of topology at a pedagogical university / A. V. Ushakov // Modern Pedagogical Education. 2020. № 6. P. 29–36.

Статья поступила в редакцию: 25.07.2023;
одобрена после рецензирования: 04.09.2023;
принята к публикации: 11.09.2023.

The article was submitted: 25.07.2023;
approved after reviewing: 04.09.2023;
accepted for publication: 11.09.2023.

Информация об авторах / Information about the authors:

Екатерина Николаевна Бажанова — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Ekaterina N. Bazhanova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

bazhanovaen@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0001-7714-0579

Ольга Васильевна Кирюшкина — старший преподаватель департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Olga V. Kiryushkina — Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

kiryushkinaov@mgpu.ru

Ирина Олеговна Ковпак — кандидат педагогических наук, доцент, доцент департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Irina O. Kovpak — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

kovpakio@mgpu.ru

Виктор Семенович Корнилов — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, начальник департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Viktor S. Kornilov — Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921

Татьяна Владимировна Михрина — старший преподаватель департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Tatiana V. Mikhrina — Senior Lecturer of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

mikhrinatv@mgpu.ru

Андрей Владимирович Ушаков — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Andrey V. Ushakov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

ushakovav@mgpu.ru, https://orcid.org/0000-0002-7665-2086

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.