Научная статья
УДК 378
DOI: 10.25688/2072-9014.2023.65.3.09

МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В КУРСЕ «ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Виктор Семенович Корнилов[1] ✉,
Камалбек Мейрбекович Беркимбаев[2]

[1] Московский городской педагогический университет,
Москва, Россия

[2] Международный Турецко-Казахстанский университет им. Ходжа Ахмеда Есави,
Кентау, Казахстан

[1] kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921
[2] kamalbek.berkimbaev@yandex.kz

Аннотация. В статье уделено внимание методу обращения разностной схемы, который может входить в содержание некоторых спецкурсов по обратным задачам, адресованных студентам-математикам старших курсов вузов. Излагаются особенности одного из наиболее известных методов нахождения приближенного решения обратных задач, а именно метода обращения разностной схемы. Подчеркивается, что умение студентов выявлять особенности нахождения некорректных решений систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет большое значение для реализации метода обращения разностной схемы при исследовании обратных задач.

Ключевые слова: метод обращения разностной схемы; прикладные задачи; обучение обратным задачам; студент.

Original article
UDC 378
DOI: 10.25688/2072-9014.2023.65.3.09

FINITE DIFFERENCE METHODS IN THE CONTENT OF TEACHING INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Viktor S. Kornilov[1] ✉,
Kamalbek M. Berkimbayev[2]

[1] Moscow City University,
Moscow, Russia

[2] International Hoca Ahmet Yesevi Turkish-Kazakh University,
Kentau, Kazakhstan

[1] kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921
[2] kamalbek.berkimbaev@yandex.kz

Abstract. The article pays attention to the method of inversion of the difference scheme, which may be included in the content of some elective courses devoted to inverse problems and addressed to mathematics students of senior university courses. The features of one of the most well-known methods of finding an approximate solution to inverse problems, namely, the method of inversion of the difference scheme, are described. It is emphasized that the ability of students to identify the features of finding incorrect solutions to systems of linear algebraic equations (SLAE) is of great importance for the implementation of the method of inversion of the difference scheme in the study of inverse problems.

Keywords: method of inversion of the difference scheme; applied problems; teaching inverse problems; student.

Для цитирования: Корнилов В. С., Беркимбаев К. М. Метод обращения разностной схемы в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». 2023. № 3 (65). С. 100–106.

For citation: Kornilov V. S., Berkimbayev K. M. Finite difference methods in the content of teaching inverse problems for differential equations // MCU Journal of Informatics and Informatization of Education. 2023. № 3 (65). P. 100–106.

Введение

В настоящее время методы вычислительной математики широко востребованы при поиске решений разнообразных нелинейных математических моделей, с помощью которых могут изучаться физические процессы и явления. В основе многих нелинейных математических моделей лежат дифференциальные уравнения, точное решение которых часто бывает сложно либо невозможно найти. Поэтому на помощь приходят технологии вычислительной математики, которые позволяют найти приближенное решение с высокой степенью точности.

Среди нелинейных математических моделей, в основе которых находятся дифференциальные уравнения, обратим внимание на математические модели обратных задач для дифференциальных уравнений (ММОЗДУ). С помощью таких математических моделей возможно изучать свойства объектов, выявлять причинно-следственные связи процессов и явлений в труднодоступных или недоступных исследователю местах. Заметим, что ММОЗДУ находит свое применение во многих научных областях, например при изучении морских природных катастроф или глубинных слоев Земли, создании диагностических приборов, обработке фотоизображений, установлении предыстории состояния процесса и др.

Основы теории ММОЗДУ были заложены в 30–40-х годах XX века (В. А. Амбарцумян, Г. Борг, П. С. Новиков, И. М. Рапопорт, Д. П. Рябушинский, Л. Н. Сретенский, А. Н. Тихонов и др.). С 50-х годов теория обратных задач развивается в работах российских и зарубежных специалистов, среди которых: Ю. Е. Аниконов, Р. Арканджели, А. В. Баев, А. Л. Бухгейм, П. Н. Вабишевич, А. О. Ватульян, Т. Галли, К. С. Гарднер, И. М. Гельфанд, Дж. Готлиб, М. Грасселли, Р. Дарридж..., А. М. Денисов, Дж. Дуглас, В. К. Иванов, С. И. Кабанихин, Д. Колтон, М. Г. Крейн, М. М. Лаврентьев, В. А. Марченко, А. И. Прилепко, В. Г. Романов, А. Н. Тихонов, Ю. М. Чен, В. А. Юрко, М. Ямамото и др. [1–3].

Важным направлением развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений является разработка приближенных методов решения (А. С. Алексеев, П. Н. Вабищевич, Ю. В. Гласко, С. И. Кабанихин, М. М. Кокурин, А. В. Лобанов, Г. И. Марчук, В. Г. Романов, В. П. Танана, О. А. Тихонова, А. А. Самарский, М. А. Шишленин и др.). Среди таких приближенных методов отметим конечно-разностные методы, градиентные методы, итерационные методы Гельфанда – Левитана – Крейна, Ньютона – Канторовича и др. [1–3]. Современные компьютерные технологии позволяют демонстрировать такие приближенные методы как эффективные методы исследования нелинейных ММОЗДУ.

Российские специалисты по ММОЗДУ уделяют большое внимание подготовке будущих специалистов по обратным задачам, знакомя студентов с приближенными методами их решения. Данная возможность предоставляется на учебных занятиях, проводимых для студентов-математиков старших курсов, в стенах высших учебных заведений на курсах по выбору или, например, во время работы таких студентов над курсовыми и выпускными квалификационными работами [1; 2; 4–6]. При этом на таких занятиях студентов учат не только строить вычислительные алгоритмы решения обратных задач, изучать их свойства и анализировать полученное приближенное решение, но и осваивать аналитические и приближенные методы решения, метод математического моделирования, вычислительный эксперимент.

Методы исследования

Одним из универсальных приближенных методов нахождения решения ММОЗДУ, с которым студенты знакомятся на занятиях курсов по выбору, является метод обращения разностной схемы. Его идея состоит в следующем: рассматриваемая ММОЗДУ заменяется разностной схемой. Чтобы получить разностное уравнение, студенты заменяют область непрерывного изменения аргументов, входящих в ММОЗДУ, дискретным множеством точек (сеткой); аппроксимируют на этом множестве точек дифференциальное уравнение разностным уравнением. В результате конструируется разностная схема, которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), построенную в соответствии с видом ММОЗДУ. Метод обращения разностной схемы по количеству операций эквивалентен однократному решению соответствующей прямой задачи.

Отметим некоторые разновидности разностных схем, которые могут быть использованы методом обращения разностной схемы.

Для ММОЗДУ, использующих обыкновенные дифференциальные уравнения, могут применяться:

– *трехточечные разностные схемы.* На равномерной сетке выбирается трехточечный шаблон, на котором и выписывается разностная схема, которой аппроксимируются ММОЗДУ;

– *консервативные разностные схемы на равномерной сетке.* Это разностные схемы, отражающие на сетке такие же законы сохранения, которые присутствуют в ММОЗДУ;

– *консервативные разностные схемы на неравномерной сетке.* Это разностные схемы, отражающие на неравномерной сетке такие же законы сохранения, которые присутствуют в ММОЗДУ.

Важной задачей преподавателя является научить студентов конструировать разностные схемы для ММОЗДУ с заданным качеством, применяя математические методы. Такими методами являются: интегро-интерполяционный метод, вариационно-разностные методы, метод аппроксимации квадратичного функционала и др.

Для ММОЗДУ, использующих уравнения математической физики, могут применяться разнообразные шаблоны разностных схем. Выбор шаблона в первую очередь зависит от размерности самого дифференциального уравнения, присутствующего в ММОЗДУ. В рассматриваемых на курсах по выбору модельных обратных задачах, у которых предполагается вычислить приближенное решение, как правило, используются одномерные или двумерные дифференциальные уравнения.

Студенты знакомятся с явными разностными схемами, с неявными разностными схемами, с явно-неявными разностными схемами; осваивают и различные методы построения разностных схем для нахождения приближенных решений ММОЗДУ. Отметим некоторые из них.

Метод разностной аппроксимации. В этом методе частные производные функций, входящие в ММОЗДУ, заменяются разностными выражениями.

Интегро-интерполяционный метод. Здесь предпочтение отдается в первую очередь шаблону разностной схемы, затем формируется дискретная область, разбиваемая на так называемые ячейки.

В дальнейшем присутствующее в исходной модели дифференциальное уравнение интегрируется по ячейкам и в заключение оформляется в интегральной форме, соответствующей физическому закону сохранения.

Результаты исследования

Изучая метод обращения разностной схемы решения ММОЗДУ на курсах по выбору, студенты развивают свои научные знания по вычислительной математике, в частности осваивают методы решения СЛАУ. Умение выявлять особенности нахождения некорректных решений СЛАУ имеет большое значение для реализации приближенных методов решения ММОЗДУ, поскольку, как уже отмечалось выше, в результате сведения исходной ММОЗДУ к разностному ее аналогу конструируется СЛАУ. И в дальнейшем находится решение этой СЛАУ. При этом студенты могут столкнуться с определенными трудностями. Например, у СЛАУ может оказаться плохо обусловленная невырожденная матрица, для которой решение СЛАУ будет неустойчивым. Или, например, СЛАУ может иметь вырожденную матрицу. И так как некоторые уравнения этой системы являются линейной комбинацией других уравнений, то эта СЛАУ является недоопределенной. Тогда у этой СЛАУ либо нет решений, либо их бесконечное множество. Знание таких особенностей нахождения некорректных решений СЛАУ имеет большое значение при использовании приближенных методов решения ММОЗДУ [4].

На практике при нахождении приближенных решений ММОЗДУ студенты имеют дело и с такими фундаментальными математическими понятиями, как сеточная область, шаблон разностной схемы, регулярный узел, нерегулярный узел, порядок аппроксимации разностной схемы, порядок сходимости приближенного решения ММОЗДУ, устойчивость приближенного решения ММОЗДУ и другими понятиями вычислительной математики.

Заключение

Успешное конструирование студентами вычислительных алгоритмов нахождения приближенных решений ММОЗДУ возможно, очевидно, только тогда, когда они уже имеют знания не только по численным методам, но и по дисциплинам прикладной математики. То есть здесь важно обратить внимание на должную согласованность в учебных планах высшего учебного заведения, согласно которым студенты уже должны иметь за плечами изученные математические дисциплины для освоения приближенных методов решения ММОЗДУ.

Список литературы

1. Романов В. Г. К вопросу обоснования метода Гельфанда – Левитана – Крейна для двумерной обратной задачи // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, № 5. С. 908–924.
2. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: учебное пособие. М.: УРСС, 2004. 478 с.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
4. Правильные и неправильные задания для СЛАУ: анализ и методы обучения / С. И. Кабанихин [и др.] // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 255–263. URL: http://semr.math.nsc.ru/v12/c1-283.pdf
5. Корнилов В. С. Базовые понятия информатики в содержании обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2016. № 1. С. 70–84.
6. Корнилов В. С. Теория и методика обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений: монография. М.: ОнтоПринт, 2017. 500 с.

References

1. Romanov V. G. On the issue of substantiation of the Gelfand – Levitan – Crane method for a two-dimensional inverse problem // Sibirskii Matematicheskii Zhurnal. 2021. Vol. 62, № 5. P. 908–924. (In Russ.).
2. Samarskiy A. A., Vabishevich P. N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics: textbook. M.: URSS, 2004. 478 p. (In Russ.).
3. Yurko V. A. Introduction to the theory of inverse spectral problems. M.: Fizmatlit, 2007. 384 p. (In Russ.).
4. Correct and incorrect tasks for SLAU: analysis and teaching methods / S. I. Kabanikhin [et al.] // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 255–263. (In Russ.). URL: http://semr.math.nsc.ru/v12/c1-283.pdf
5. Kornilov V. S. Basic concepts of computer science in the content of teaching inverse problems for differential equations // RUDN Journal of Informatization in Education. 2016. № 1. P. 70–84. (In Russ.).
6. Kornilov V. S. Theory and methodology of teaching inverse problems for differential equations: monograph. M.: OntoPrint, 2017. 500 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию: 15.02.2023;
одобрена после рецензирования: 17.04.2023;
принята к публикации: 27.04.2023.

The article was submitted: 15.02.2023;
approved after reviewing: 17.04.2023;
accepted for publication: 27.04.2023.

Информация об авторах / Information about authors:

Виктор Семенович Корнилов — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, начальник департамента математики и физики, Институт цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия.

Viktor S. Kornilov — Doctor of Pedagogy, PhD (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Physics, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia.

kornilovvs@mgpu.ru ✉, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921

Камалбек Мейрбекович Беркимбаев — доктор педагогических наук, профессор, директор Кентауского института, Международный Турецко-Казахстанский университет имени Ходжа Ахмеда Есави, Кентау, Казахстан.

Kamalbek M. Berkimbayev — Doctor of Pedagogy, Full Professor, Director of the Kentau Institute, International Hoca Ahmet Yesevi Turkish-Kazakh University, Kentau, Kazakhstan.

kamalbek.berkimbaev@yandex.kz

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.