Научная статья
УДК 378
DOI: 10.25688/2072-9014.2022.61.3.08

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ В СОДЕРЖАНИИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ ОБРАТНЫМ И НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ

Виктор Семенович Корнилов

Московский городской педагогический университет, Москва, Россия
kornilovvs@mgpu.ru, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921

Аннотация. В работе обращается внимание на вычислительные алгоритмы, которые изучаются студентами в курсе по выбору «Обратные и некорректные задачи». Отмечается, что такие вычислительные алгоритмы демонстрируют междисциплинарные связи. Для наглядности приводится вычислительный алгоритм, с которым знакомятся студенты на учебных занятиях по обратным и некорректным задачам.

Ключевые слова: обратные и некорректные задачи; вычислительные алгоритмы; междисциплинарные связи; студент.

Original article
UDC 378
DOI: 10.25688/2072-9014.2022.61.3.08

COMPUTATIONAL ALGORITHMS IN THE CONTENT TEACHING UNIVERSITY STUDENTS THE INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS

Viktor S. Kornilov

Moscow City University, Moscow, Russia
kornilovvs@mgpu.ru, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921

Abstract. The paper draws attention to computational algorithms that are studied by students in elective courses “Inverse and ill-posed problems”. It is noted that such computational algorithms demonstrate interdisciplinary connections. For clarity, a computational algorithm is given, which students get acquainted with during training sessions on inverse and incorrect problems.

Keywords: inverse and ill-posed problems; computational algorithms; interdisciplinary connections; student.

Для цитирования: Корнилов, В. С. Вычислительные алгоритмы в содержании обучения студентов вузов обратным и некорректным задачам // Вестник МГПУ. Серия «Информатика и информатизация образования». 2022. № 3 (61). С. 83–94. DOI: https://www.doi.org/10.25688/2072-9014.2022.61.3.08

For citation: Kornilov, V. S. (2022). Computational Algorithms in the Content Teaching University Students the Inverse and Ill-Posed Problems. *MCU Journal of Informatics and Informatization of Education,* 3 (61), 83–94. https://www.doi.org/10.25688/2072-9014.2022.61.3.08

Введение

Вычислительные алгоритмы нахождения решений математических задач интересовали ученых прошлых столетий и до сих пор продолжают интересовать многих математиков сегодня. Это обстоятельство объясняется тем, что анализ сложных математических задач, представляющих собой математические модели, описывающие физические процессы и явления, требует создания приближенных методов их решения, основу которых составляют вычислительные алгоритмы.

Архимед (ок. 287–212 до н. э.), Аль-Хорезми (780–847), Ш. Ферро (1465–1526), Дж. Кардано (1501–1576), Л. Феррари (1522–1565), Ф. Виета (1540–1603), Дж. Непер (1550–1617), И. Ньютон (1643–1727), Д. Рафсон (1648–1715), Б. Тейлор (1685–1731), Д. Стирлинг (1692–1770), Л. Эйлер (1707–1783), К. Ф. Гаусс (1777–1855), Ч. Бэббидж (1791–1871), Д. К. Адамс (1819–1892), У. Ж. Ж. Леверье (1811–1877), Т. де Кальмара (1785–1870), П. Л. Чебышев (1821–1894), Г. Холерит (1860–1929), Н. Г. Чеботарев (1894–1947) и многие другие математики разных стран мира в свое время занимались разработкой разнообразных вычислительных алгоритмов и внесли тем самым фундаментальный вклад в создание и развитие методов вычислительной математики.

Большое значение в дальнейшем развитии вычислительных алгоритмов решения математических прикладных задач имели работы таких авторов, как Г. Холерит (1860–1929), А. Н. Крылов (1863–1945), Б. Г. Галеркин (1871–1945), В. Ритц (1878–1909), М. Р. Фреше (1878–1973), Р. Курант (1888–1927), К. Ланцош (1893–1974), Н. Г. Чеботарев (1894–1947), А. О. Гельфонд (1906–1968), А. Н. Тихонов (1906–1993), А. А. Дородницын (1910–1994), Л. В. Канторович (1912–1986), А. А. Самарский (1919–2008), Г. И. Марчук (1925–2013), С. К. Годунов (р. 1929), Н. С. Бахвалов (1934–2005). Можно упомянуть еще многих других математиков, которые внесли свой вклад в создание и развитие вычислительной математики (см., например, [1]).

Математические методы и технологии обратных и некорректных задач позволяют идентифицировать различные свойства объектов, процессов и явлений и получать новые научные знания. Осуществление неразрушающего контроля и диагностики объектов, определение местоположения или формы объектов, реконструкция изображений, выявление причинно-следственных связей исследуемых процессов и явлений — все эти (и еще многие другие проблемы) приводят к необходимости решать обратные и некорректные задачи.

Обратные и некорректные задачи часто возникают в геофизике, химии, биологии, экономике, промышленности, медицинской томографии и во многих других научных областях. Решение обратных и некорректных задач может дать новую информацию, заменив непосредственные измерения. Особенно это важно в случаях недоступности или труднодоступности изучаемых объектов, процессов и явлений. Речь может идти о глубоких слоях Земли, дне Мирового океана, космическом пространстве.

Существенный вклад в разработку и развитие теории и практики обратных и некорректных задач внесли такие авторы, как Ж. Адамар, А. С. Алексеев, В. А. Амбарцумян, В. Я. Арсенин, Г. Борг, А. Л. Бухгейм, П. Н. Вабишевич, В. В. Васин, И. М. Гельфанд, В. К. Иванов, С. Г. Крейн, Б. М. Левитан, М. М. Лаврентьев, В. А. Марченко, П. С. Новиков, Ю. П. Петров, А. И. Прилепко, В. Г. Романов, А. А. Самарский, В. С. Сизиков, В. П. Танана, А. Н. Тихонов, Л. А. Халфин, С. П. Шишатский, В. А. Юрко, R. Arcangeli, Y. M. Chen, H. Cordes, A. J. Douglas, H. Engl, D. W. Fox, T. Gallie, G. Gerglotz, F. Joxn, M. H. Protter, E. Wichert, N. Wiener и мн. др. (см., например, [2–7]).

При подготовке бакалавров и магистрантов физико-математических направлений подготовки большую роль в развитии их творческих способностей, научного мировоззрения играют так называемые междисциплинарные учебные дисциплины, где на учебных занятиях излагаются математические методы и технологии мировой науки. Одной из таких междисциплинарных учебных дисциплин являются обратные и некорректно поставленные задачи (см., например, [2–16]).

Методы исследования

Бакалавры и магистранты на учебных занятиях осваивают такие эффективные математические методы, как метод подбора, метод квазиобращения, метод операторных уравнений, метод регуляризации Тихонова, метод решения на компакте, метод Фурье, метод преобразования Лапласа, метод характеристик, метод шкал банаховых пространств, метод Соболева и другие математические методы (см., например, [5, 7, 17–20]).

Процесс изучения многих обратных и некорректно поставленных задач трудоемок из-за их нелинейности, что создает математические трудности при поиске решения и в будущем доказательстве корректности задачи. Поэтому преподавателями на учебных занятиях уделяется особое внимание приближенным методам их решения. Бакалавры и магистранты нарабатывают умения и навыки поиска приближенных решений обратных и некорректных задач с помощью методов вычислительной математики, применяя вычислительные алгоритмы, основу которых составляют конечно-разностные методы, вариационные методы, оптимизационные методы, методы решения стационарных задач математической физики, методы решения нестационарных задач математической физики.

Результаты исследования

Здесь важно подчеркнуть следующее обстоятельство: обучающимся обязательно доводятся сведения о том, что подобные вычислительные алгоритмы демонстрируют широкие междисциплинарные связи. Для наглядности этого факта можно рассмотреть задачу построения численного решения обратной задачи нахождения неизвестного коэффициента $a(x)$, входящего в семейство обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,\ \alpha)+\alpha(x)\,y(x,\alpha)=0,\ x\in R,\ \alpha\in R, \tag{1}$$

которое будет рассматриваться при начальных условиях

$$y(\alpha,\ \alpha)=1,\ \frac{d}{dx}y(\alpha,\ \alpha)=1,\ \alpha\in R \tag{2}$$

и дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2)

$$y(x^*,\ \alpha)=\varphi\ (\alpha). \tag{3}$$

В (1)–(3) α — числовой параметр, x^* — фиксированное значение x.

Уравнение (1), которое в научной литературе носит название уравнения Хилла [21], часто встречается в научных исследованиях волновых процессов, гармонических колебаний, в геофизике и других научных исследованиях. Это уравнение исследовалось многими авторами, в том числе Ж. Боргом, Н. Е. Жуковским, М. Г. Крейном, А. М. Ляпуновым, В. М. Старжимским, В. А. Якубовичем.

Уравнение (1) можно выписать в виде уравнения Риккати:

$$\frac{d}{dx}U(x,\ \alpha)+U^2=-\alpha(x),$$

$$U(x,\ \alpha)=\frac{\frac{d}{dx}y(x,\ \alpha)}{y(x,\ \alpha)}.$$

На учебных занятиях при изучении обратной задачи (1)–(3) рассматриваются некоторые вычислительные алгоритмы ее решения, в том числе вычислительный алгоритм, который строится на основе использования неявной разностной схемы. Вкратце изложим основные этапы построения и анализа такого вычислительного алгоритма.

Прежде всего заменим непрерывную область изменения x, α дискретной областью $\Omega_h=\left\{(k,i)\middle|k=\overline{1,N},\ i=\overline{1,N},N=\frac{1}{h}\right\}$ (см. рис. 1), в узлах которой определим сеточные функции $v(k,i)=v_k^i$, $\beta\ (k)=\beta_k, f(i)=f_i,\ k,\ i=\overline{1,N}$.

Причем

$$f_i=\varphi(\alpha_i),\ i=\overline{1,N}. \tag{4}$$

Теперь, используя неявную разностную схему, выпишем дискретный аналог дифференциальных соотношений (1)–(3) в виде соотношений (5)–(8):

$$\frac{v_{k+1}^i-2v_k^i+v_{k-1}^i}{h^2}+\beta_{k+1}v_{k+1}^i=0,\ k=\overline{1,N-1},\ i=\overline{0,N}, \tag{5}$$

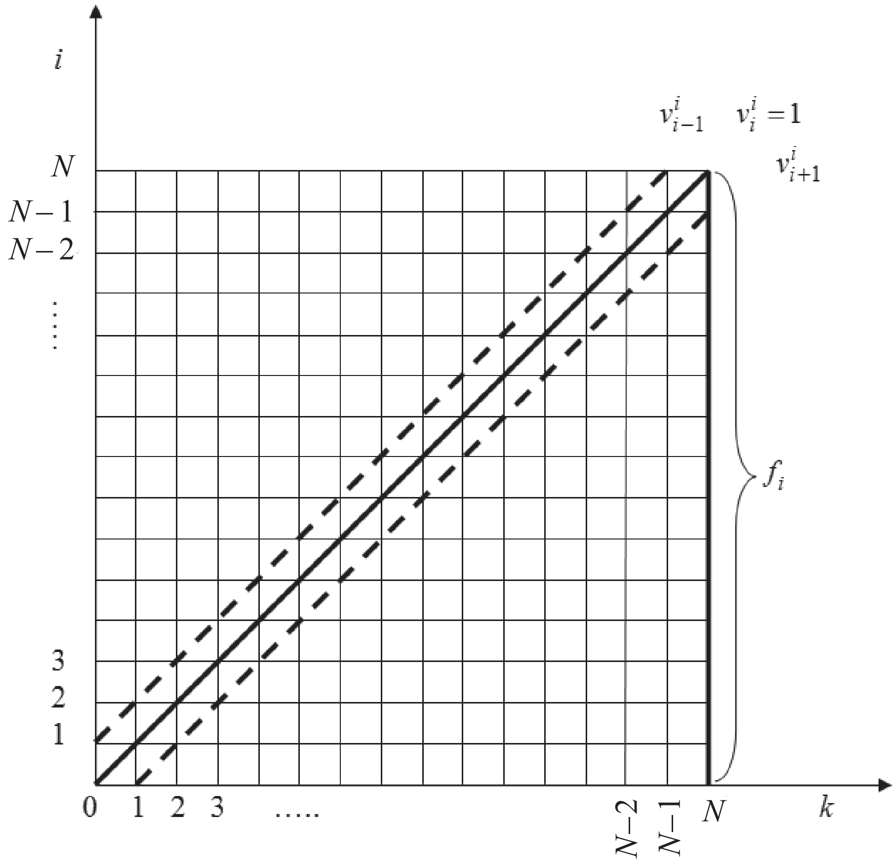

Рис. 1. Дискретная область Ω_h

$$v_i^i = 1,\ \ i = \overline{0, N}, \tag{6}$$

$$v_{i+1}^i = v_{i-1}^i,\ \ i = \overline{0, N-1}, \tag{7}$$

$$v_N^i = f_i,\ \ i = \overline{0, N}. \tag{8}$$

Обучающимся формулируется разностная обратная задача: из (5)–(8) вычислить $\left\{v_k^i\right\}_{k=\overline{1,N}}^{i=\overline{1,N}}$, $\left\{\beta_k\right\}_{k=\overline{0,N}}$.

Приступим к изложению вычислительного алгоритма, выписав несколько важных шагов его построения.

Из (5) следует равенство

$$v_{k-1}^i - 2v_k^i + v_{k+1}^i + h^2\beta_{k+1}v_{k+1}^i = 0. \tag{9}$$

В (9) положим и учтем (6), (7):

$$v_{i-1}^i - 2v_i^i + v_{i+1}^i + h^2\beta_{i+1}v_{i+1}^i = 0,$$

$$2v_{i+1}^i - 2 + h^2\beta_{i+1}v_{i+1}^i = 0,$$

откуда несложно выписать формулу для вычисления β_i:

$$\beta_i = \frac{2\left(1-v_i^{i-1}\right)}{h^2 v_i^{i-1}},\ i=\overline{1,N}. \tag{10}$$

То есть для вычисления β_i требуются v_i^{i-1}, значения которых находятся на диагонали $i = k - 1$ (см. рис. 1).

Начнем с определения β_N. Положим в (9) $i = N$ и учтем (8):

$$\beta_N = \frac{2\left(1-f_{N-1}\right)}{h^2 f_{N-1}}. \tag{11}$$

Далее определим v_{N-1}^{N-2}, для чего рассмотрим (9), когда $k = N - 1$, $i = N - 2$, а также учтем (6)–(8), (11):

$$v_{N-2}^{N-2} - 2v_{N-1}^{N-2} + v_N^{N-2} + h^2\beta_N v_N^{N-2} = 0,$$

$$1 - 2v_{N-1}^{N-2} + f_{N-2} + h^2\beta_N f_{N-2} = 0,$$

$$v_{N-1}^{N-2} = \frac{1 + f_{N-2} + h^2 f_{N-2}}{2}. \tag{12}$$

Теперь определим β_{N-1}. В (10) положим $i = N - 1$ и учтем (12):

$$\beta_{N-1} = \frac{2\left(1-v_{N-1}^{N-2}\right)}{h^2 v_{N-1}^{N-2}}. \tag{13}$$

Вычисленное значение β_{N-1} теперь позволяет определить v_{N-1}^{N-3}, v_{N-2}^{N-3}.

$$\begin{cases} v_N^{N-3} - 2v_{N-1}^{N-3} + v_{N-2}^{N-3} + h^2\beta_N v_N^{N-3} = 0, \\ v_{N-1}^{N-3} - 2v_{N-2}^{N-3} + v_{N-3}^{N-3} + h^2\beta_{N-1} v_{N-1}^{N-3} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{N-3} - 2v_{N-1}^{N-3} + v_{N-2}^{N-3} + h^2\beta_N f_{N-3} = 0, \\ v_{N-1}^{N-3} - 2v_{N-2}^{N-3} + 1 + h^2\beta_{N-1} v_{N-1}^{N-3} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -2\cdot v_{N-1}^{N-3} + 1\cdot v_{N-2}^{N-3} = \left(1 + h^2\beta_N\right) f_{N-3}, \\ \left(1 + h^2\beta_{N-1}\right)\cdot v_{N-1}^{N-3} - 2\cdot v_{N-2}^{N-3} = -1. \end{cases}$$

Запишем ее в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \theta_{N-1} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{N-1}^{N-3} \\ v_{N-2}^{N-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_N f_{N-3} \\ -1 \end{pmatrix},\ \theta_i = 1 + h^2\beta_i, \tag{14}$$

которая является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно v_{N-1}^{N-3}, v_{N-2}^{N-3}. Из (14) эти значения несложно определить.

Далее на 5 шаге из (13) определяется β_{N-2}:

$$\beta_{N-2} = \frac{2\left(1 - v_{N-2}^{N-3}\right)}{h^2 v_{N-2}^{N-3}}.$$

На 6-м шаге определяются $v_{N-1}^{N-4}, v_{N-2}^{N-4}, v_{N-3}^{N-4}$, переместившись по i на слой $N-4$ и рассмотрев совместно (9) при $k = N-1$, $k = N-2$ и $k = N-3$.

Итогом 6-го шага является СЛАУ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \theta_{N-1} & -2 & 1 \\ 0 & \theta_{N-2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{N-1}^{N-4} \\ v_{N-2}^{N-4} \\ v_{N-3}^{N-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_N f_{N-4} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

относительно $v_{N-1}^{N-4}, v_{N-2}^{N-4}, v_{N-3}^{N-4}$, ее матрица является трехдиагональной, из которой их можно определить различными методами, например методом Гаусса.

Значения v_k^i, для $k = \overline{N-1,\ 1}$, $i = \overline{0,\ k-1}$ определяются из СЛАУ

$$A_i Y_{i-1}^{i-2} = B_{i-2},\ i = N-1,\ N-2,\ \ldots,\ 2, \tag{16}$$

где A_i — трехдиагональная матрица:

$$A_i = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \theta_{N-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{N-2} & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \theta_{i+1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \theta_i & -2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$Y_{i-1}^{i-2} = \left(v_{N-1}^{i-2},\ v_{N-2}^{i-2},\ v_{N-3}^{i-2},\ \ldots,\ v_i^{i-2},\ v_{i-1}^{i-2}\right)^T,$$

$$B_{i-2} = \left(-\theta_N f_{i-2},\ \underbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{p} -1\right)^T,$$

где T — знак транспонирования, $p = N-1-i$, $i = \overline{N-1,\ 2}$.

В дальнейшем студентам предлагается доказать теорему единственности решения рассматриваемой дискретной обратной задачи. Обучающимся поясняется, что единственность решения системы (16) может обеспечить невырожденность трехдиагональной матрицы, а именно выполнение неравенства

$$\left|a_{kk}\right| \geq \sum_{j \neq k} \left|a_{kj}\right|, \forall k, \tag{18}$$

причем хотя бы для одного k должно быть строгое неравенство.

Далее на занятиях обучающихся знакомят с математическими подходами и технологиями проверки свойства (18), с помощью которого доказывают теорему единственности решения дискретной обратной задачи. Сформулируем ее.

Теорема 1. Если решение разностной обратной задачи (5)–(8) $\beta_k,\ k=\overline{1,\ N}$ существует и $\beta_m \in \left[-\frac{2}{h^2}, 0\right]$, то оно единственно.

Внимание студентов обращается на то, что вышеописанный вычислительный алгоритм нахождения β_k имеет некоторый «дефект»: он не позволяет вычислить значение β_0. Это является следствием того, что мы использовали при аппроксимации дифференциального уравнения (1) неявную трехточечную разностную схему (5). Но данное положение можно исправить, используя интерполяционные многочлены Ньютона для равноотстоящих узлов.

Заключение

Рассмотренный вычислительный алгоритм предполагает возможность попутно решать обучающимися некоторые задачи линейной алгебры, а именно выполнять операции над матрицами и вектор-столбцами, вычислять определители матриц, проводить анализ свойств трехдиагональных матриц, находить решение СЛАУ с трехдиагональными матрицами, вычислять вектор-столбцы, решать другие задачи линейной алгебры [22, 23].

Это замечание подтверждает тот факт, что численное решение прикладной математической задачи на основе построения и реализации вычислительных алгоритмов, представляющих собой решение задач линейной алгебры, является одним из важных направлений развития методов и технологий вычислительной математики.

На учебных занятиях бакалавры и магистранты осваивают приемы и технологии корректного использования вычислительных алгоритмов при поиске численных решений обратных и некорректно поставленных задач. Важно подчеркнуть, что при этом обучающиеся убеждаются в том, что современные вычислительные алгоритмы способны эффективно вычислить приближенное решение нужной математической задачи.

Понимание важности вычислительных алгоритмов, с помощью которых исследуются обратные и некорректные задачи, демонстрирующих междисциплинарные связи, способствует мотивации бакалавров и магистрантов к приобретению системы фундаментальных научных предметных знаний.

Список источников

1. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
2. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. 181 с.

3. Вабищевич, П. Н. Вычислительные методы математической физики. Обратные задачи и задачи управления. М.: Вузовская книга, 2019. 478 с.

4. Обратные и некорректные задачи: учеб. пособие / А. О. Ватульян, О. А. Беляк, Д. Ю. Сухов, О. В. Явриян. Ростов н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2011. 232 с.

5. Лаврентьев, М. М., Романов, В. Г., Шишатский, С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

6. Петров, Ю. П., Сизиков, В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учеб. пособие. СПб.: Политехника, 2003. 261 с.

7. Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

8. Корнилов, В. С. Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учеб. пособие. М.: МГПУ, 2005. 359 с.

9. Корнилов, В. С. Реализация дидактических принципов обучения при использовании образовательных электронных ресурсов в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2006. № 1 (3). С. 40–44.

10. Корнилов, В. С. Вузовская подготовка специалистов по прикладной математике — история и современность // Наука и школа. 2006. № 4. С. 10–12.

11. Корнилов, В. С. Психологические аспекты обучения студентов вузов фрактальным множествам // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2011. № 4. С. 79–82.

12. Корнилов, В. С. Обратные задачи в учебных дисциплинах прикладной математики // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2014. № 1 (27). С. 60–68.

13. Корнилов, В. С. Базовые понятия информатики в содержании обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2016. № 1. С. 70–84.

14. Kornilov, V. S. Development of Scientific Knowledge of Students on Computer Simulation in Training Inverse Problems for Differential Equations // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2022. Т. 19. № 1. С. 54–61.

15. Корнилов, В. С. Развитие у студентов предметных научных знаний при обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Известия Казахского университета международных отношений и мировых языков имени Абылай хана. Серия «Педагогические науки». Алматы: «Полилингва» баспасы. 2022. № 2 (65). С. 214–224.

16. Professional competence development when teaching computational informatics / M. Revshenova [et al.] // Cypriot Journal of Educational Sciences. Vol. 16. Iss. 5. October 2021. P. 2575–2585. DOI: 10.18844/cjes.v16i5.6360.

17. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.

18. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 432 с.

19. Танана, В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 157 с.

20. Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

21. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 3. Ч. 2. 674 с.

22. Воеводин, В. В., Кузнецов, Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

23. Ланкастер, П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.

References

1. Marchuk, G. I. (1989). *Methods of computational mathematics.* Moscow: Nauka. 608 p. (In Russ.).

2. Buchheim, A. L. (1988). *Introduction to the theory of inverse problems.* Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch. 181 p. (In Russ.).

3. Vabishevich, P. N. (2019). *Computational methods of mathematical physics. Inverse problems and management problems.* Moscow: University Book. 478 p. (In Russ.).

4. Vatulyan, A. O., Belyak, O. A., Sukhov, D. Yu., & Yavruyan, O. V. (2011). *Inverse and incorrect problems.* Textbook. Rostov-on-Don: Publishing House of the Southern Federal University. 232 p. (In Russ.).

5. Lavrentiev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatsky, S. P. (1980). *Incorrect problems of mathematical physics and analysis.* Moscow: Nauka. 286 p. (In Russ.).

6. Petrov, Yu. P., & Sizikov, V. S. (2003). *Correct, incorrect and intermediate problems with applications.* Textbook. St. Petersburg: Polytechnic. 261 p. (In Russ.).

7. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Ya. (1986). *Methods of solving ill-posed problems.* Moscow: Nauka. 287 p. (In Russ.).

8. Kornilov, V. S. (2005). *Some inverse problems of identifying parameters of mathematical models.* Textbook. Moscow: MCU. 359 p. (In Russ.).

9. Kornilov, V. S. (2006). Implementation of didactic principles of teaching when using educational electronic resources in the course «Inverse problems for differential equations». *RUDN Journal of Informatization in Education,* 1 (3), 40–44. (In Russ.).

10. Kornilov, V. S. (2006). University training of specialists in applied mathematics — history and modernity. *Science and School*, 4, 10–12. (In Russ.).

11. Kornilov, V. S. (2011). Psychological aspects of teaching university students fractal sets. *RUDN Journal of Informatization in Education,* 4, 79–82. (In Russ.).

12. Kornilov, V. S. (2014). Inverse problems in academic disciplines of applied mathematics. *MCU of Journal of Informatics and Informatization of Education,* 1 (27), 60–68. (In Russ.).

13. Kornilov, V. S. (2016). Basic concepts of computer science in the content of teaching inverse problems for differential equations. *RUDN Journal of Informatization in Education,* 1, 70–84. (In Russ.).

14. Kornilov, V. S. (2022). Development of Scientific Knowledge of Students on Computer Simulation in Training Inverse Problems for Differential Equations. *RUDN Journal of Informatization in Education, 19* (1), 54–61. (In Russ.).

15. Kornilov,V. S. (2022). The development of students' subject scientific knowledge in teaching inverse problems for differential equations. *Proceedings of the Kazakh University of International Relations and World Languages named after Abylai Khan. The series «Pedagogical sciences». Almaty: «Polylingua» baspasy, 2* (65), 214–224. (In Kazakhstan).

16. Revshenova, M., Bidaibekov, E., Kornilov, V., Kamalova, G., Shekerbekova, S., Gulzhan, S., & Sabrayev, K. (2021). Professional competence development when teaching computational informatics. *Cypriot Journal of Educational Sciences, 16* (5), 2575–2585. https://www.doi.org/10.18844/cjes.v16i5.6360

17. Arsenin, V. Ya. (1984). *Methods of mathematical physics and special functions.* Moscow: Nauka. 384 p. (In Russ.).

18. Sobolev, S. L. (1992). *Equations of mathematical physics.* Moscow: Nauka. 432 p. (In Russ.).

19. Tanana ,V. P. (1981). *Methods of solving operator equations.* Moscow: Nauka. 157 p. (In Russ.).

20. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Ya. (1986). *Methods of solving ill-posed problems.* Moscow: Nauka. 287 p. (In Russ.).

21. Smirnov, V. I. (1974). *Course of higher mathematics.* Moscow: Nauka. *Vol. 3 (2).* 674 p. (In Russ.).

22. Voevodin, V. V., & Kuznetsov, Yu. A. (1984). *Matrices and calculations.* Moscow: Nauka. 320 p. (In Russ.).

23. Lancaster, P. (1982). *Matrix theory.* Moscow: Nauka. 272 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию: 22.03.2022;
одобрена после рецензирования: 29.04.2022;
принята к публикации: 17.05.2022.

The article was submitted: 22.03.2022;
approved after reviewing: 29.04.2022;
accepted for publication: 17.05.2022.

Информация об авторе:

Виктор Семенович Корнилов — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, профессор департамента информатизации образования Института цифрового образования, Московский городской педагогический университет, Москва, Россия,

kornilovvs@mgpu.ru, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921

Information about author:

Viktor S. Kornilov — Doctor of Pedagogy, PhD (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Professor of the Department of Informatization of Education, Institute of Digital Education, Moscow City University, Moscow, Russia,

kornilovvs@mgpu.ru, http://orcid.org/0000-0003-0476-3921