Педагогическая информатика | Pedagogical Informatics

УДК 373
DOI 10.25688/2072-9014.2022.59.1.01

Д. М. Златопольский

МЕТОДИКА ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО И КУБИЧЕСКОГО КОРНЕЙ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

В статье подробно описываются методы извлечения квадратного и кубического корней в двоичной системе счисления. Метод извлечения квадратного корня из двоичного числа аналогичен соответствующему методу применительно к десятичным числам, который называется методом извлечения столбиком. Как и для десятичных чисел, при подборе очередной цифры корня используется удвоенное текущее значение корня, представленное в двоичной системе.

Для облегчения подбора очередной цифры корня (0 или 1) рассчитан ряд стандартных значений, зависящих от текущего значения корня. Предлагаются задания для самостоятельной работы учащихся.

Ключевые слова: двоичная система счисления; извлечение корня; квадратный корень; кубический корень.

D. M. Zlatopolski

METHOD FOR EXTRACTING SQUARE AND CUBIC ROOTS IN THE BINARY NUMBER SYSTEM

The article describes in detail the methods of extracting square and cube roots in the binary number system. The method for extracting the square root of a binary number is similar to the corresponding method for decimal numbers, which is called the “column method”. As for decimal numbers, when choosing the next digit of the root, twice the current value of the root, represented in the binary system, is used. To facilitate the selection of the next root digit (0 or 1), a number of standard values have been calculated, depending on the current root value. Assignments for independent work of students are offered.

Keywords: binary number system; root extraction; square root; cube root.

Различные вопросы, связанные с двоичной системой счисления, в том числе выполнение в ней сложения, вычитания, умножения и деления чисел, рассмотрены в большом количестве источников[1] [1–5]. Менее известны методы извлечения квадратного и кубического корней. В данной статье мы подробно опишем их.

Метод извлечения квадратного корня из двоичного числа аналогичен соответствующему методу, применяемому к десятичным числам, который называется методом извлечения столбиком[2]. Напомним, что при его использовании число, корень из которого ищется, мысленно или метками разбивается на группы по две цифры, начиная с конца числа (крайняя левая группа может состоять из одной цифры), и происходит подбор очередной цифры при учете групп чисел по некоторым правилам. Суть этих правил в том, что очередная цифра корня — эта такая максимальная цифра k, при которой произведение удвоенного текущего значения корня с приписанной к нему цифрой k не превышает на k текущее обрабатываемое число. Например, когда текущее значения корня равно 2, а обрабатывается число 296, то такой цифрой является 6 ($45 \times 5 = 225$; $46 \times 6 = 276$; $47 \times 7 = 329$, что больше 296).

Применительно к двоичным числам эти правила такие же. Приведем пример. Пусть надо извлечь квадратный корень из числа 1010001. Для него разбиение на группы, о котором шла речь выше, будет таким: 1.01.00.01. Сразу заметим, что количество групп определяет количество цифр в корне, если корень извлекается точно, и в его целой части, если извлекается приближенно.

Выписывается число, корень которого ищем. Справа от него будем постепенно получать цифры искомого корня:

1.01.00.01 |

Первая цифра корня всегда равна 1[3]. Вычтем ее из числа крайней левой группе — получим 0.

1.01.00.01 | 1 (первая цифра корня).

Сносим две цифры следующей группы. Слева от них (01 или в данном случае 1) проведем вертикальную черту, левее которой записываем удвоенное текущее значение корня:

10 | 01

---

1 Двоичная система счисления [Электронный ресурс] // Википедия: свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Двоичная_система_счисления (дата обращения: 25.09.2021).

2 Квадратный корень [Электронный ресурс] // Википедия: свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Квадратный_корень#Столбиком (дата обращения: 25.09.2021).

3 Это и другие обстоятельства, связанные с количеством цифр в двоичной системе счисления, позволяют утверждать, что извлечение квадратного корня из двоичных чисел проводится гораздо проще, чем из десятичных, потому что подбор подходящей очередной цифры корня упрощается.

Ищем следующую цифру корня:

10? | 01
?

Видно, что поскольку цифрой вместо вопросительного знака, при которой произведение 10? × ? не превышает текущее число (1), может быть только 0, то именно 0 является очередной цифрой корня:

1.01.00.01 | 10 (две первые цифры корня).

При этом оставшееся число[4] (1) не изменится. Приписываем к нему две очередные цифры и также записываем слева удвоенное текущее значение корня:

100 | 0100.

В этой ситуации следующая цифра корня также равна нулю:

100? | 0100
?

Продолжая аналогично, получим:

1.01.00.01 | 100 (первые три цифры корня)
1000? | 10001
?

Очередная (последняя) цифра корня равна 1. Так как при вычитании из текущего числа (чуть выше оно справа) числа слева с цифрой 1 в конце (10001) получится 0, то это значит, что корень извлекается точно и он равен 1001 ($1001_2 = 9_{10}$, $1010001_2 = 81_{10}$).

Приведем еще один характерный момент. Пусть надо извлечь корень из двоичного числа 100100. Так как оно оканчивается на 00, то можно извлечь корень из «укороченного» числа 1001 и приписать к нему справа 0. Последовательность действий для числа 1001 представлена ниже:

1 0 0 1 | 1 1

1 0
1

10? | 1 01
? | *1* 1 01
0

Итак, ответ: 110.

[4] Или разность, полученная при вычитании, — см. далее.

Теперь более сложный случай. Найдем квадратный корень из двоичного числа 11111101001 (1.11.11.10.10.01). В расчетах с целью упрощения подбора очередной цифры корня мы не будем использовать умножение вида (или подобное):

100?
    ?,

а будем сравнивать число вида 100? (или подобного, в котором, напомним, число в виде цифр — это удвоенное текущее значений корня, вопросительный знак соответствует очередной цифре) с текущим обрабатываемым числом. При этом в качестве вопросительного знака должна быть исследована только цифра 1. Если число вида 100? (или подобного) больше текущего обрабатываемого числа, то очередная цифра равна нулю, и последнее число не меняется, в противном случае очередная цифра равна единице.

Итак, первая цифра корня — 1. Вычитаем ее из числа в крайней левой группе — получим 9 и сносим 11:

~~1~~.11.11.10.10.01 | 1 (первая цифра корня),
10 | 11 (10 — это удвоенное текущее значение корня).

Ищем вторую цифру. Так как 10? больше текущего числа (11), то это будет цифра 0:

~~1~~.~~11~~.11.10.10.01 | 10 (две первые цифры корня).

Сносим 11:

100 | 111 (100 — удвоенное текущее значение корня).

Так как 100? меньше 1111, то очередная цифра корня — 1.
Вычитая 1001 из 1111, получим 110.
Сносим 10:

~~1~~.~~11~~.~~11~~.~~10~~.10.01 | 101 (три первые цифры корня),
1010 | 11010.

Так как 1010? меньше 11010, то очередная цифра корня — 1.

Продолжив аналогичные вычисления (которые предлагаем провести читателям самостоятельно), получим корень, равный 101101.

Задание для самостоятельной работы учащихся

Найти квадратный корень из числа:
а) 110001,
б) 1001110001,
в) 1001110110001.

Теперь об извлечении кубического корня. Здесь метод также во многом аналогичен методу извлечения кубического корня из десятичного числа[5]. Напомним, что при нем число разбивается на группы по три цифры, а при подборе очередной цифры используются числа 300 и 30, а также текущее значение корня и очередная цифра.

Применительно к двоичному числу отличие состоит в способе подбора очередной цифры корня. Во-первых, понятно, что она может быть 1 или 0[6]. Во-вторых, есть и другие особенности:

1) вместо числа 300 (3×10^2) используется двоичное число 11×100 (то есть $3_2 \times 4_2$) = 1100;
2) вместо числа 30 (3×10) используется двоичное число 11×10 (то есть $3_2 \times 2_2$) = 110.

Учитывая это, можно сформулировать условие для записи единицы:

текущее число должно быть не меньше, чем 1100 × (*текущее значение корня*)^2 + 110 × (*текущее значение корня*) + 1.

Это значит, что **необходимое условие** для единицы — текущее число должно быть больше 1100 × (*текущее значение корня*)^2. Определим это значение (назовем его граничным) для нескольких текущих значений корня (см. табл. 1); оно очень поможет нам при вычислениях.

Таблица 1

Текущее значение корня	Граничное значение
1	1100
10	110000
11	1101100
100	11000000
101	100101100
110	110110000
111	1001001100

Определим также соответствующие значения для суммы 110 × (*текущее значение корня*) + 1 (см. табл. 2).

Таблица 2

Текущее значение корня	Значение 110 × (текущее значение корня) + 1
1	111
10	1101
11	10011
100	11001
101	11111
110	100101
111	101011

[5] Кубический корень [Электронный ресурс] // Википедия: свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический_корень#Столбиком (дата обращения: 25.09.2021).

[6] То есть и здесь задача упрощается.

Рассмотрим ряд примеров.

Пусть надо извлечь кубический корень из двоичного числа 1111101.

Разбиваем его на группы по три цифры, начиная справа: 1.111.101.

Первая цифра корня — 1. Вычитаем ее и сносим цифры второй слева группы:

111 | 1 — *текущее значение корня.*

Подбираем очередную цифру. Так как текущее число (111) меньше граничного (1100), то очередная цифра — ноль. Приписываем ее к текущему значению корня и сносим цифры очередной группы:

111101 | 10 — *текущее значение корня.*

В этой ситуации необходимое условие для единицы соблюдается — 111101 больше граничного числа для текущего значения корня (110000), поэтому продолжаем определение очередной цифры кубического корня.

Для этого вычитаем граничное число:

$$\begin{array}{r} \_\ 111101 \\ \underline{\ \ 110000} \\ 1101 \end{array}$$

Сравниваем разность со значением в таблице 2 для текущего значения корня (10). Они равны, поэтому после вычитания из разности числа 1101 получим 0, то есть корень извлекается точно и равен 101_2 (5_{10}). Если бы разность была положительной или/и остались бы тройки «необработанных» цифр, то расчеты следовало бы продолжить.

Более сложный случай — определение кубического корня из двоичного числа 10111110000111. Разбиение его на группы имеет следующий вид:

10.111.110.000.111.

Первая цифра корня — 1. Вычтя ее из 10 и приписав к разности 111, получим число 1111.

Ищем вторую цифру. Так как 1111 больше граничного числа 1100 для текущей ситуации (см. табл. 1), то второй цифрой может быть 1. Проверим. Для этого вычтем 1100 из 1111 и сравним полученную разность 11 с соответствующим числом в таблице 2 (111). Так как разность будет меньше, то единица не может быть второй цифрой.

Поскольку вторая цифра — 0, то обрабатываемое число не изменилось, и к нему приписываем следующую группу цифр:

1111110 | 10 — *текущее значение корня.*

Для определения третьей цифры корня сравниваем число 1111110 со значением 110000 (см. табл. 1). Видно, что очередной цифрой может быть 1. Для проверки вычтем 110000 из 1111110 — получим 1001110. Разность больше соответствующего числа из таблицы 2 (1101). Это значит, что третья цифра — 1. Поэтому проведем еще одно вычитание (1101 из 1001110) — получим оставшееся число 1000001. После приписывания к нему очередной группы цифр будем иметь следующую ситуацию:

1000001000 | 101 — *текущее значение корня.*

Дальнейшие действия по получению результата также предлагаем провести читателям.

Задания для самостоятельной работы учащихся

Найти квадратный корень из числа:
а) 11011000,
б) 10100110011,
в) 110100101111.

В заключение заметим, что если корень не является целым числом, то после учета крайней правой группы цифр вычисления следует продолжить, снося по два (или по три) нуля и находя аналогичным образом цифры в дробной части корня до достижения требуемой точности.

Литература

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 328 с.
2. Босова Л. Л., Босова А. Ю. Информатика. 10 класс: учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 288 с.
3. Поляков К. Ю., Еремин Е. А. Информатика. 8 класс: учебник. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 256 с.
4. Поляков К. Ю., Еремин Е. А. Информатика. 10 класс. Базовый и углубленный уровни: учебник: в 2 ч. Ч. 1. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 352 с.
5. Семакин И. Г. Информатика: учебник для 8 класса / И. Г. Семакин и др. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2013. 176 с.

Literatura

1. Andreeva E. V., Bosova L. L., Falina I. N. Matematicheskie osnovy` informatiki. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2005. 328 s.
2. Bosova L. L., Bosova A. Yu. Informatika. 10 klass: uchebnik. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2016. 288 s.
3. Polyakov K. Yu., Eremin E. A. Informatika. 8 klass: uchebnik. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2019. 256 s.
4. Polyakov K. Yu., Eremin E. A. Informatika. 10 klass. Bazovy`j i uglublenny`j urovni: uchebnik: v 2 ch. Ch. 1. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2016. 352 s.
5. Semakin I. G. Informatika: uchebnik dlya 8 klassa / I. G. Semakin i dr. M.: BINOM. Laboratoriya znanij. 2013. 176 s.