УДК 373.5.016:51
DOI: 10.25688/2072-9014.2021.58.4.07

**Л. О. Денищева, И. С. Сафуанов,
Ю. А. Семеняченко, А. В. Ушаков,
В. А. Чугунов**

Математическое моделирование — важнейший этап формирования математической грамотности в условиях запросов современного общества

В статье обсуждаются учебно-методические аспекты формирования математической грамотности у обучающихся. Приводятся примеры практико-ориентированных задач, направленных на формирование математической грамотности.

Ключевые слова: математическое образование; математическая грамотность; математическое моделирование; обучающийся.

Введение

Термин mathematical literacy («математическая грамотность») впервые появился в 1944 году, когда комиссия по послевоенным планам американского Национального совета учителей математики (National Council of Teachers of Mathematics — NCTM) выдвинула требование, чтобы школа обеспечивала математическую грамотность для всех, кто способен овладеть ею [14, 15, 18]. Этот термин в разных значениях употреблялся и в последующие годы, предшествовавшие его формализации после исследований PISA (Programme for International Student Assessment — Программа международного оценивания учащихся). В первые десятилетия математическая грамотность понималась просто как удовлетворительное владение элементарной математикой, изучаемой в школе. Когда в 1989 году впервые появились стандарты NCTM [16], в них также говорилось о математической грамотности, но никаких определений этого термина приведено не было.

Первая попытка явного определения была предпринята в разработке ОЭСР (Организация экономического сотрудничества и развития — Organisation for Economic Cooperation and Development, OECD) для первого исследования PISA. Определение несколько раз видоизменялось с новыми циклами исследования PISA и сейчас формулируется так: *«Математическая грамотность — это способность человека рассуждать математически и формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в различных контекстах реального мира»* (рис. 1).

Рис. 1. Схематическое изображение понятия математической грамотности

Такая формулировка включает понятия, процедуры, факты и инструменты для описания, объяснения и прогнозирования явлений. Она помогает людям узнавать о роли, которую математика играет в мире, и осуществлять обоснованные суждения и решения, необходимые прогрессивным, мыслящим, заинтересованным в науке гражданам XXI века.

Американский исследователь Л. Стин отмечал [23] возрастающую важность математической грамотности в наши дни, понимая ее именно так, как сформулировано в приведенном выше определении.

Мир XXI века наводнен числами. Заголовки используют количественные показатели, чтобы сообщить о росте цен на бензин, изменениях в баллах выпускных экзаменов, рисках смерти от различных болезней, количестве беженцев от последней межэтнической войны и т. д. Для многих людей стало более важным постоянное использование количественного мышления на своем рабочем месте, в образовании и почти во всех других областях человеческой деятельности. К сожалению, несмотря на годы учебы и жизнь в окружении цифровых данных, многие образованные взрослые остаются функционально незрелыми.

Касаясь краткой истории количественной грамотности, Л. Стин отмечает, что хотя математика как научная дисциплина имеет древнюю историю, но требование к простым гражданам быть количественно грамотными возникло лишь во второй половине XX столетия.

Дубинский призывает учитывать важность развития абстрактного мышления для математической грамотности [11].

Килпатрик, обобщив исследования рубежа веков по развитию математической грамотности, призвал реформировать математическое образование в соответствии с требованиями уровня современных информационных технологий и потребностями учащихся [13].

Исследованию математической грамотности учащихся различных возрастов от начальной школы до университета посвящена монография Иветты Соломон [22].

Нисс и Хейгор отмечают, что математическую грамотность не следует путать с математической компетентностью или считать одной из математических компетенций [17].

Проблемам неотъемлемых от математической грамотности разновидностей функциональной грамотности посвящен ряд статей: Вайланда [24] — о статистической грамотности, Озкале и Эрдогана [19], а также Соул [21] — о финансовой грамотности, Гераниу и Янквиста [12] — о математической цифровой грамотности.

Заметим, что задачи, связанные с жизненными ситуациями, требующие умения строить математические модели, широко используются в сингапурской системе обучения математике [6; 7].

В 2005 году в статье, опубликованной в «Энциклопедии социальных измерений» [10], Ян де Ланге привел подробное описание понятия «математическая грамотность», основанное на определении математической грамотности, сформулированном ОЭСР для исследования PISA. Он ввел понятие пространственной грамотности и построил иерархию, где понятие «математическая грамотность» включает в себя и пространственную грамотность, и числовую грамотность, и количественную грамотность, к которой относятся также явления изменчивости и неопределенности.

Одновременно с участием в международных исследованиях TIMSS и PISA в России, как и в других странах, усилилось внимание к проблеме развития математической грамотности, этому посвящен ряд публикаций последних лет [1; 3–5].

Необходимо отметить, что в концепции PISA-2021 [20] (на самом деле очередное исследование перенесено на 2022 год) говорится, что в оценке математической грамотности необходимо учитывать растущую роль компьютеров как в повседневной жизни, так и в контексте задач, предлагаемых для проверки математической грамотности. Возрастает роль умения строить математические модели, которые можно было бы использовать для решения задач как самим человеком, так и с помощью компьютеров.

Подводя итог сказанному и опираясь на зарубежные и отечественные исследования по формированию математической грамотности, можно утверждать, что основой этого процесса на современном этапе развития общества является проблемный подход. Однако изначально проблема не должна быть математической, а должна вытекать из окружающей нас действительности. При этом основная роль учителя состоит в том, чтобы научить обучающихся увидеть в жизненной проблеме количественные связи, формулировать возникшую проблему на языке математики и, решив уже чисто математическую задачу, дать обоснованное решение возникшей проблеме.

Таким образом, главным аспектом концепции формирования математической грамотности является цикл моделирования (формулировать – применять – интерпретировать – оценивать, см. рис. 1). Необходимость движения успешности в реализации этой концепции требует от любого учителя высокой квалификации не только в своей предметной области, но и предъявляет другое условие: быть современным человеком, понимающим жизненные и технические тенденции общества XXI века, а также быть математически грамотным человеком (когда речь идет не об учителе математики). Все это создает определенные трудности при подготовке уроков, нацеленных на формирование математической грамотности.

Поэтому основная цель предлагаемой статьи такова: на примере практико-ориентированных задач, направленных на формирование математической грамотности, продемонстрировать все этапы математического моделирования.

Представленный материал поможет учителям строить уроки так, чтобы познание нового и закрепление пройденного материала сочеталось с приобретением учащимися компетенций, необходимых для формирования математической грамотности.

Математическое моделирование и его этапы

Следует отметить, что моделирование — это творческий процесс. Заключить его в формальные рамки очень трудно. В наиболее общем виде его можно представить поэтапно, но при решении конкретной задачи эта схема может подвергаться некоторым изменениям: какой-то блок будет убран или усовершенствован, какой-то — добавлен. Содержание этапов определяется поставленной задачей и целями моделирования.

Под моделью будем понимать естественный или искусственный объект, находящийся в определенном соответствии с изучаемым объектом или, точнее, с какой-либо из его сторон. В общетеоретическом смысле [8] моделирование определяется как метод опосредованного познания, при котором изучаемый объект (оригинал) находится в некотором соответствии с другим объектом (моделью), причем объект-модель способен в том или ином отношении замещать оригинал на некоторых стадиях познавательного процесса. Стадии познания, на которых может происходить эта замена, равно как и формы соответствия модели и оригинала, могут быть различны.

Исходя из понятия отображения, принятого в теории познания, можно определить два характерных вида моделирования:

− моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешнего мира, о происходящих в нем явлениях. В результате этой информации в сознании появляются образы, имеющие определенное сходство с соответствующими объектами. Сумма этих образов позволяет выявлять свойства изучаемых объектов и их взаимодействие, что способствует в конечном итоге нахождению решения проблемы, возникшей со стороны окружающей среды;

− моделирование как создание некоторой системы — системы-модели, имеющей определенное сходство с системой-оригиналом. Две эти материально реализованные системы связаны соотношениями подобия [2]. Отображение одной системы в другой есть следствие выявления сложных зависимостей между двумя системами, отраженных в соотношении подобия, а не результат непосредственного изучения поступающей информации.

Первый вид моделирования имеет мысленный характер, второй — материальный, поскольку его реализация требует создания специальных установок, воспроизводящих исследуемую систему.

Первый вид моделирования обладает очевидным преимуществом, поскольку, как правило, не требует существенных материальных затрат. Очевидно, что математическое моделирование относится к первому виду моделирования.

В настоящее время, в век цифровизации, математическое моделирование применяется практически во всех сферах человеческой деятельности, так как тесно связано с компьютерным моделированием. Учитывая современный смысл, вкладываемый в термин «математическое моделирование», его можно определить так: математическое моделирование — это средство изучения реального объекта, процесса или системы путем их замены математической моделью, как правило, более удобной для исследования с привлечением компьютера. Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. Математические модели в количественной форме описывают с помощью логико-математических конструкций основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Построение математической модели заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами и факторами, влияющими на конечный результат.

Говоря о математическом моделировании при обучении математической грамотности, можно выделить следующие особенности общепризнанных основных этапов моделирования:

Постановка задачи. Под задачей понимается некая проблема, которую надо решить. На этапе постановки задачи необходимо описать проблему на обычном языке и описание должно быть понятным. Главное здесь — определить объект моделирования и понять, что должен представлять собой результат. Кроме того, на этом этапе необходимо провести анализ объекта. При этом четко выделяют моделируемый объект, его основные свойства, его элементы и связи между ними. Таким образом, при решении задачи, формирующей математическую грамотность, первый этап является подготовительным к переводу описанной проблемы на язык математики.

Разработка математической модели. На этом этапе отбирают данные, необходимые для построения модели, и переходят от реальной системы к некоторой логической схеме, выраженной математическим языком. После того как сформулирована математическая задача, она анализируется на корректность, то есть устанавливается существование и единственность ее решения.

Реализация математической модели. Этот этап характеризуется тем, что здесь происходит разработка математического метода решения поставленной математической задачи. Применение разработанного метода дает или аналитическое решение задачи, или обоснованный алгоритм для получения решения на компьютере. Важным шагом этого этапа является процесс идентификации математической модели. Речь идет об уточнении математической модели до совпадения с тестовыми или контрольными данными.

Планирование вычислительного эксперимента и анализ результатов эксперимента. На этом этапе определяют, какие параметры модели и в каких пределах можно изменять при проведении вычислительного эксперимента. Естественно, что конечная цель моделирования — принятие решения относительно изначально возникшей проблемы, которое может быть обоснованно выработано только на основе всестороннего анализа полученных результатов.

Следует отметить, что количество этапов есть величина относительная. Так, например, если речь пойдет о компьютерной модели, то количество этапов увеличится, так как будет дополнительно включать этап разработки компьютерной модели.

Решение практико-ориентированных задач в рамках понятий математического моделирования

Покажем, какие особенности имеет каждый из перечисленных этапов моделирования при обучении в основной и старшей школе; прокомментируем, куда смещаются акценты в обучении решению практико-ориентированных задач при переходе учащихся в старшие классы. Начнем с основной школы. Рассмотрим задачу.

Задача «Дорожка в саду» (8 класс, геометрия). На садовом участке планируют проложить новую дорожку. Схема того места, где хотят расположить дорожку, показана на рисунке (см. рис. 2).

Рис. 2. Схематическое изображение садового участка

В точках А и В посажены розовые кусты, а в точке С находится калитка. Как проложить от калитки прямолинейную дорожку, параллельную розовым кустам?

Постановка задачи. Первый этап математического моделирования связан с описанием проблемы. Как видно из условия задачи, проблема уже поставлена: проложить дорожку, параллельно какой-то прямой линии. Такая ситуация, возможно, достаточно часто может встречаться в основной школе.

Разработка математической модели. В работе на этом этапе нам помогает схема (рисунок) расположения места, где нужно выполнить строительные работы. Ученики могут сопоставить схему, данную в условии задачи, с теми рисунками-чертежами, которыми они оперировали на уроках геометрии. Это, вероятнее всего, приведет их к математической модели, с помощью которой и разрешается данная проблемная ситуация: по трем заданным вершинам построить параллелограмм (данное описание, по существу, и является математическим выражением исходной задачи, так как содержит математические термины).

Реализация математической модели. Этот этап характеризуется применением изученных математических знаний (способы построения параллелограмма), то есть решением известной математической задачи. В данной задаче ученик разрабатывает алгоритм построения параллелограмма по известным его диагоналям. Полученная четвертая вершина параллелограмма дает возможность провести прямую CD, она и должна моделировать дорожку, которую планировали проложить.

Планирование вычислительного эксперимента и анализ результатов эксперимента. Как мы видим, в данной задаче не требуется проведения непосредственных вычислительных процедур. Однако роль вычислительного эксперимента играет построение требуемой дорожки и обоснование ее параллельности линии расположения розовых кустов.

Приведенный пример показывает также, что процесс построения математической модели и ее вид существенно зависят от уровня математической подготовки обучающихся и специфики получаемой математической задачи. Поэтому изложение материала должно сопровождаться указанием групп учащихся, на которые рассчитаны обсуждаемые примеры.

Задача «Приготовление картофеля» (6 класс). В семье Марины принято по выходным дням готовить простую, но вкусную еду. В ближайшие выходные Марина (ей 14 лет) решила приготовить жареный картофель. Она знает, что обедать будет все семейство: бабушка с дедушкой, папа с мамой и ее брат (ему 12 лет). Марина в Интернете узнала следующие данные (см. табл. 1 и 2).

На балконе хранилось 3 кг картофеля, который заранее купила мама. Хватит ли Марине 3 кг сырого картофеля, чтобы накормить ее семью? Ответ обоснуйте.

Постановка задачи. Первый этап математического моделирования связан с описанием проблемы. Как видно из условия задачи, проблема поставлена

Таблица 1

Обработка картофеля	Потери массы картофеля (в %)
Отходы при чистке	30 % массы неочищенного
Потери при тепловой обработке	31 % массы очищенного

Таблица 2

Порция картофеля	Масса порции картофеля (в г)
Взрослый человек	200
Дети 12–14 лет	150–170

не на математическом языке, ведь обычно на этом языке звучат проблемы так: вычисли, проведи параллельную прямую и пр. Марине нужно принять решение относительно того, хватит ли ей продуктов для приготовления планируемого блюда. Такая ситуация достаточно характерна для задач, развивающих математическую грамотность. С ними ученик встречается в основной школе. Чтобы научить учеников решать подобные задачи, учитель готовит их к переформулировке житейской проблемы на математический язык. Для такой работы от ученика требуется хорошее видение зависимостей между отдельными величинами — данными задачи: масса готового блюда зависит от чистки продуктов, их уварки (ужарки) и пр.

Таким образом, ученик должен понимать, что масса готового блюда будет меньше, чем масса сырых продуктов, а поэтому нужно исходя из условия (приведенных таблиц) вычислить, какова должна быть масса готового блюда, а потом поставить вопрос о массе сырых продуктов. Примерно такие вот рассуждения ученик должен научиться проводить, чтобы успешно реализовать данный этап.

В результате проведенного анализа можно констатировать, что существуют следующие величины, характеризующие проблему: M_c и $M_г$ — массы сырой и готовой продукции соответственно; x, y, z — количество взрослых, детей 12 лет, детей 14 лет соответственно, участвующих в обеде. Из условий задачи следует очевидное неравенство, которое должно выполняться:

$$M_г < M_c \leq 3 \text{ кг.}$$

Разработка математической модели. Из предыдущего этапа мы получили вопрос, сформулированный на математическом языке: вычислить массу сырого картофеля, необходимую для приготовления блюда. На этом этапе у нас нет готовой модели решения ситуации, но опыт математической деятельности, осваиваемый учеником на уроках математики, нам подсказывает метод решения, с помощью которого можно справиться с возникшей жизненной проблемой. Мы формулируем стандартную текстовую задачу на проценты, подобные ей ученики уже многократно решали на уроках математики.

Однако здесь нет готового алгоритма, ученик его должен составить, используя различные методы поиска решения (аналитический, синтетический или аналитико-синтетический методы).

Анализируя исходные данные, учащиеся находят связь между параметрами

$$M_r \text{ и } x, y, z : M_r = 200\,x + 150\,y + 170\,z$$

Так как готовая продукция получается из сырой за счет чистки и обжаривания, то можно записать равенство

$$k\,M_c = M_r\,,$$

где k — коэффициент уменьшения массы сырой продукции. Полученные два соотношения и являются математической моделью процесса готовки жаренного картофеля.

Реализация математической модели. На этом этапе ученики применяют изученные математические знания (проведение различных вычислительных процедур, в частности нахождение процента от числа или числа по его проценту), то есть используют известные математические алгоритмы. Из данных таблицы 1 нетрудно получить коэффициент уменьшения массы сырой продукции: $k = 0{,}483$.

Выражая параметр M_c из полученных на предыдущем этапе соотношений, находим:

$$M_c = (200\,x + 150\,y + 170\,z)\,/\,k\,.$$

Полученная формула позволяет найти количество сырой продукции, необходимой для того, чтобы накормить x взрослых, y детей 12 лет и z детей 14 лет.

Планирование вычислительного эксперимента и анализ результатов эксперимента. Анализ решения сформулированной учеником математической задачи не завершает разрешение проблемной ситуации, поставленной в исходной задаче, так как требуется еще проведение интерпретации полученного ответа. Марина должна ответить на вопрос, хватит ли ей картофеля для приготовления блюда. Чтобы ответить на него, необходимо в полученную формулу подставить следующие данные: $x = 4, y = 1, z = 1, k = 0{,}483$.

В результате получаем:

$$M_c = 2319 \text{ г} = 2 \text{ кг } 319 \text{ г} < 3 \text{ кг},$$

то есть Марине хватит имеющегося картофеля.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров практико-ориентированных задач для старшей школы. В этих примерах акцент будет сделан на подробной реализации каждого этапа моделирования.

Задача о захвате территории (10 класс).

Постановка задачи. Многочисленная семья Стрельцовых любит проводить время на даче. Дачный участок у них большой, и есть территория, на которой можно посадить овощи.

Задание. Родители просят дочь Свету, ученицу 10-го класса, чтобы она рассчитала размеры прямоугольной площадки, которую можно огородить специальным невысоким забором длиной 120 метров, чтобы получился участок, на котором можно было бы посадить как можно больше овощей.

Анализ проблемы. Эксперимент. Света пробует подобрать такую площадку экспериментально.

План действий:

Шаг 1. Возьмем проволоку длиной 120 см.

Шаг 2. Сделаем из этой проволоки прямоугольную рамку.

Шаг 3. Измерим стороны рамки (длину a, ширину b).

Шаг 4. Найдем площадь прямоугольной фигуры S.

Шаг 5. Результаты измерений занесем в таблицу.

Шаг 6. Будем изменять стороны рамки, производить необходимые замеры и вычисления, затем заносить их в таблицу (см. рис. 3 и табл. 3).

Шаг 7. Сравним полученные значения площадей.

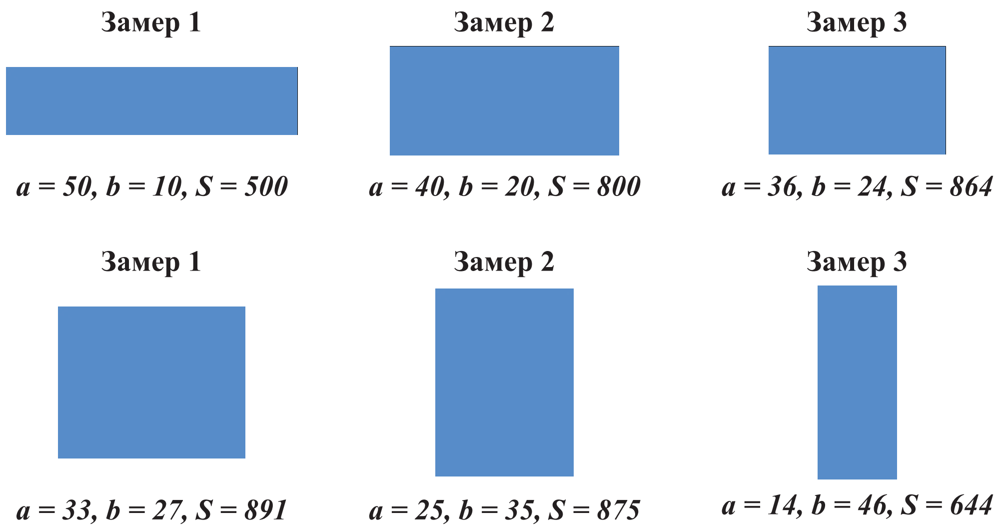

Рис. 3. Результаты замеров

Таблица 3

Результаты эксперимента

№	a (длина)	b (ширина)	S (площадь)
1	50	10	500
2	40	20	800
3	36	24	864
4	33	27	891
5	25	35	875
6	14	46	644

Выдвижение гипотезы

В таблице 3 прослеживается закономерность: чем меньше разность между длиной и шириной прямоугольника, тем больше его площадь.

Гипотеза:

среди всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

***a* = 33, *b* = 27, *S* = 891**

Разработка математической модели. Выбираем оптимизируемую величину и составляем функцию, для которой необходимо найти наибольшее (наименьшее) значение. Нужно найти прямоугольную площадку наибольшей площади, т. е. оптимизируемая величина — это площадь $S = a \cdot b$.

Неизвестными в задаче являются длина и ширина прямоугольника, обозначим длину a переменной x. Зная периметр площадки, можно выразить ее ширину $b : b = 120 : 2 - x = 60 - x$. Тогда функция, выражающая оптимизируемую величину, может быть записана так: $y = x\,(60 - x)$. Так как длина прямоугольника не может быть отрицательной и превышать полупериметр, то $D\,(y) = [0; 60]$.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения функции $y\,(x)$ на отрезке [0; 60]. Данная задача поставлена корректно, так как по теореме Вейерштрасса имеет единственное решение.

Реализация математической модели. Находим производную функции $y = 60 - 2x$; стационарные точки: $60 - 2x = 0$; $x = 30$ — стационарная точка, значение 30 принадлежит промежутку [0; 60]; $y\,(0) = 0$, $y\,(30) = 900$, $y\,(60) = 0$.

Интерпретация полученных результатов применительно к условиям задачи. Получили, что наибольшего значения функция достигает при $x = 30$, т. е. когда длина, а значит, и ширина прямоугольника $(60 - x)$ одинаковы и равны 30 м.

Задача о возрасте метеоритного вещества.

Постановка задачи. Как уже отмечалось, первый этап математического моделирования связан с описанием проблемы.

Одна из научных лабораторий Института космических исследований занимается изучением свойств материалов, попавших на Землю в виде метеоритов. Важнейшим параметром, который должна установить данная лаборатория, является возраст исследуемого вещества. Одним из методов определения примерной даты рождения различных веществ является метод радиоактивного распада. Он основан на том, что с течением времени одни радиоактивные вещества превращаются в другие, которые уже не являются радиоактивными. Так, например, радиоактивный уран трансформируется со временем в урановый свинец.

Задание 1. Сотрудники лаборатории знают, что скорость распада прямо пропорциональна количеству радиоактивного вещества, а период полураспада урана $t_{1/2} = 4{,}5 \times 10^9$ лет. Ранее было определено, что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Известно также, что в момент рождения исследуемого вещества оно не содержало уранового свинца, а другие компоненты не оказывают существенного влияния на процесс распада урана. Необходимо найти возраст метеоритного вещества, которое содержит одинаковое количество урана и свинца. В ответе запишите число, представленное в форме: $n_0\, n_1\, n_2 \times 10^9$.

Разработка математической модели. Для построения математической модели процесса распада радиоактивного урана введем следующие основные характеристики: $U(t)$ — количество радиоактивного урана в момент времени t; U_0 — количество радиоактивного урана в момент образования исследуемого вещества, то есть $U(0) = U_0$; $P(t)$ — количество уранового свинца в момент времени t.

Так как в момент образования вещества свинца в нем не было, то

$$P(0) = 0. \tag{1}$$

Учитывая условия задачи относительно скорости распада и определение величины U_0, можно записать:

$$\frac{dU}{dt} = -\lambda U. \tag{2}$$

$$U(0) = U_0. \tag{3}$$

Уравнение (2) и начальное условие (3) полностью определяют функцию при известных величинах λ и U_0, где λ — коэффициент радиоактивного распада.

Если в момент времени t количество урана в исследуемом образце $U(t)$, а количество уранового свинца $P(t)$, то это значит, что $(U_0 - U(t))$ (урана перешло в $P(t)$ свинца за время t. С другой стороны, известно, что 238 г урана при полном распаде переходит в 206 г уранового свинца. Учитывая этот факт, можно записать пропорцию вида:

$$\frac{(U_0 - U(t))}{238} = \frac{P(t)}{206}.$$

Из этого соотношения находим

$$P(t) = \frac{206(U_0 - U(t))}{238}. \tag{4}$$

Система уравнений (2)–(4) является математической моделью процесса распада урана и образования уранового свинца.

Математическая задача (2)–(4) корректно поставлена, так как по теореме Коши-Пикара она имеет единственное решение.

Реализация математической модели. Из уравнений (2)–(3) без труда находим функцию $U(t)$:

$$U(t) = U_0 e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

С учетом равенства (5) формула (4) может быть переписана в виде

$$P(t) = \frac{206}{238} U_0 (1 - e^{-\lambda t}). \tag{6}$$

Идентификация модели. Используя данные о периоде полураспада урана, нетрудно найти значение коэффициента распада λ. Действительно, полагая в формуле (5) $t = t_{1/2}$, а вместо $U(t) = \frac{U_0}{2}$ находим:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \tag{7}$$

Итак, выражения (5), (6) и (7) представляют настроенное решение математической модели радиоактивного распада урана с образованием уранового свинца.

Планирование вычислительного эксперимента и анализ результатов эксперимента. Как правило, параметр неизвестен, а известными в данном исследовании являются величины P и U, характеризующие количества урана и свинца в момент исследования образца метеоритного вещества. Поэтому исключим величину U_0 из выражений (5) и (6) и найдем из полученного соотношения время t. В результате получаем:

$$t = t_{1/2} \frac{\ln\left(1 + \frac{238 \cdot P}{206 \cdot U}\right)}{\ln 2} \text{ или } t = \frac{4,5 \cdot \ln\left(1 + \frac{238 \cdot P}{206 \cdot U}\right)}{\ln 2} \times 10^9 \text{ лет} \tag{8}$$

Формула (8) и служит для определения возраста исследуемого вещества. Если $P = U$, то $t = 4,98 \times 10^9$ лет.

Ответ: $4,98 \times 10^9$ лет.

Использование полученного результата на практике.

Задание 2. Установить возраст образца метеоритного вещества, если в нем обнаружили 120 мг урана и 20 мг уранового свинца, и второго образца, содержащего 100 мг урана и 14 мг уранового свинца.

Решение. Подставляя в формулу (8) $U = 120$, $P = 20$, получаем:

$$t = \frac{4,5 \cdot \ln\left(1 + \frac{238 \cdot P}{206 \cdot U}\right)}{\ln 2} \times 10^9 \text{ лет} = 1,14 \times 10^9 \text{ лет.}$$

Аналогично рассуждая, подставим теперь $U = 100$, $P = 14$. В результате получаем:

$$t = \frac{4,5 \cdot \ln\left(1 + \frac{238 \cdot P}{206 \cdot U}\right)}{\ln 2} \times 10^9 \text{ лет} = 0,97 \times 10^9 \text{ лет.}$$

Ответ: $1,14 \times 10^9$; $0,97 \times 10^9$.

Рассмотрим еще пример практико-ориентированной задачи для формирования математической грамотности у учащихся 10–11-х классов.

Задача о разведении карпов.

Постановка задачи. Одна из экологических научных лабораторий занимается разведением карпов, так как это приводит к улучшению экологии водоема. На представленном рисунке 4 приведены результаты наблюдений за ростом численности популяции карпов в искусственном водоеме за десятилетний период.

Перед лабораторией были поставлены следующие задания:

Задание 1. Какова будет популяция карпов через следующие 10 лет, если условия содержания карпов не изменятся.

Задание 2. Какова будет популяция карпов через следующие 10 лет, если улучшить качество их питания (известно, что улучшение качества питания увеличивает коэффициент роста в 2 раза).

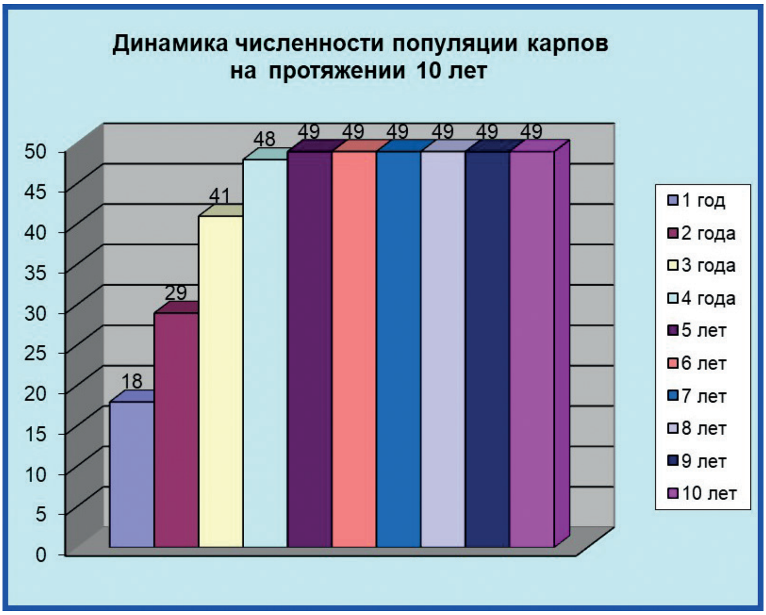

Рис. 4. Динамика численности популяции карпов

Задание 3. Какова будет популяция карпов через следующие 10 лет, если произойдет загрязнение водоема нефтепродуктами (известно, что загрязнение водоема нефтепродуктами увеличивает коэффициент убыли в 10 раз).

Замечание. В ходе проведения экспериментов с популяцией карпов было установлено, что ее рост пропорционален количеству особей в ней с коэффициентом роста $\alpha = 1{,}2$ год$^{-1}$, а ее убыль пропорциональна квадрату численности популяции с коэффициентом убыли β.

Разработка математической модели. Для построения математической модели, которая описывает процесс изменения численности популяции карпов, введем в рассмотрение следующие величины:

$N(t)$ — численность популяции карпов в момент времени t;

N_0 — количество особей в начальный момент времени, то есть $N(0) = N_0$.

Из физического смысла величин $N(t)$, N_0 вытекает, что они неотрицательные. В замечании к задаче определен закон изменения популяции карпов, который подтверждается экспериментальными данными, отображенными диаграммой (см. рис. 4). Учитывая этот факт и то, что скорость роста численности популяции выражается производной от функции $N(t)$, можно записать следующие уравнения, определяющие рост популяции карпов:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2,\ t > 0, \tag{9}$$

$$t = 0,\ N = N_0. \tag{10}$$

Следует отметить, что уравнение (9) хорошо известно и называется уравнением логистического роста, или уравнением Ферхюльста [8]. Это уравнение является хорошим примером при изучении дифференциальных уравнений на уроках математики.

Математическая задача (9), (10) поставлена корректно, поскольку по теореме Коши-Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений она имеет единственное решение.

До перехода к следующему этапу процесса математического моделирования полезно провести математическое исследование полученной математической модели. Это, как правило, позволяет получить некоторые полезные свойства решения. Так, в данном случае из уравнения (9) видно, что удельная скорость $\frac{dN}{dt} / N$ изменения численности популяции явно не зависит от времени и убывает в зависимости от величины по линейному закону и обращается в ноль, когда $N = N_\infty = \alpha / \beta$. При этом эта константа является решением уравнения (9). Следовательно, если $N = N_\infty$, то решением этой системы будет $N = N_\infty$. Таким образом, если $0 < N_0 < N_\infty$, то скорость роста положительная и функция $N(t)$ возрастает от N_0 и $N \to N_\infty$ при $t \to \infty$. Если $N_0 > N_\infty$, то скорость роста будет отрицательной, функция же $N(t)$ убывает и $N \to N_\infty$ при $t \to \infty$.

Установленные простейшие свойства решения задачи (9), (10) полезны следующим: удельная скорость изменения численности популяции карпов явно не зависит от времени, а это говорит о том, что уравнение (9) является уравнением с разделяющимися переменными и оно может быть решено в элементарных функциях. Тот факт, что при $t \to \infty$ $N \to N_\infty$, хорошо согласуется с результатами экспериментов и это наталкивает нас на использование данного факта в идентификации построенной модели.

Укажем еще на одну процедуру, которая применяется при исследовании математических моделей, особенно тогда, когда рассматриваемая модель содержит довольно много входных параметров [9]. Эту процедуру называют приведением математической модели к безразмерному виду. Она включает выбор масштабов для параметров, входящих в описание модели, введение безразмерных величин, соответствующих заданным параметрам, математическую замену переменных в математической модели и выделение безразмерных комплексов, характеризующих исследуемый процесс. Основная цель этой процедуры — упрощение построенной математической модели, которое достигается сокращением количества входных данных и возможным пренебрежением некоторыми слагаемыми в исходных уравнениях, содержащих малые безразмерные комплексы.

Несмотря на то что система (9), (10) довольно проста, ее можно использовать для демонстрации описанной выше процедуры.

Пусть t_* есть некоторый, пока произвольный масштаб времени, а N_* — произвольный масштаб численности популяции карпов. Тогда можно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\hat{N} = \frac{N}{N_*}, \tau = \frac{t}{t_*}. \tag{11}$$

Очевидно, что после замены переменных (11) в системе (9), (10) она приобретает следующий вид:

$$\frac{N_*}{t_*}\frac{d\hat{N}}{d\tau} = \alpha\hat{N}N_* - \beta\hat{N}^2 N_*^2, \tag{12}$$

$$\tau = 0,\ \hat{N}N_* = N_0. \tag{13}$$

Так как рассматривается нестационарный процесс, то скорость роста имеет существенное значение и коэффициент при производной $\frac{N_*}{t_*} \neq 0.$ Поделим уравнение (12) на $\frac{N_*}{t_*}$, получим:

$$\frac{d\hat{N}}{d\tau} = t_*\alpha\hat{N} - t_*\beta N_*\hat{N}^2. \tag{14}$$

В полученном уравнении первое слагаемое в правой части отвечает за рост численности популяции, а второе — за убыль той же популяции. Оба этих процесса важны в исследовании роста популяции. Следовательно, коэффициенты в упомянутых слагаемых должны быть одного порядка и, пользуясь произвольностью масштабов, можно записать:

$$t_*\,\alpha = 1 \text{ и } t_*\,\beta\,N_* = 1.$$

Данные равенства определяют масштабы:

$$t_* = \frac{1}{\alpha},\ N_* = \frac{\alpha}{\beta} = N_\infty. \tag{15}$$

С учетом равенств (14) и (15) система (9), (10) примет следующую форму:

$$\frac{d\hat{N}}{d\tau} = \hat{N} - \hat{N}^2; \ \tau > 0; \tag{16}$$

$$\tau = 0, \hat{N} = \hat{N}_0. \tag{17}$$

Здесь $\hat{N}_0 = \frac{N_0}{N_\infty} = \frac{N_0\beta}{\alpha}$.

Для реализации математической модели система (16), (17) предпочтительней, чем (9), (10), так как она содержит только один входной параметр $\hat{N}_0$ вместо трех.

Реализация математической модели. Как уже было отмечено, уравнение (9), а следовательно, и (16), является уравнением с разделяющими переменными. После разделения переменных и интегрирования получаем:

$$\tau + C = \int_{\hat{N}_0}^{\hat{N}} \frac{dx}{x(1-x)},$$

где C — произвольная постоянная. Пользуясь условием (17) и вычисляя интеграл, находим: $C = 0$ и

$$\tau = \ln\left|\frac{(\hat{N}_0 - 1)\hat{N}}{(\hat{N} - 1)\hat{N}_0}\right| \Rightarrow \hat{N} = \frac{\hat{N}_0}{\hat{N}_0 - (\hat{N}_0 - 1)e^{-\tau}}. \tag{18}$$

Учитывая (11) и (15), формула (18) может быть переписана в разменных переменных:

$$N = N_0 \frac{N_\infty}{N_0 - (N_0 - N_\infty)e^{-\alpha t}}. \tag{19}$$

Очевидно, что функция (19) является решением задачи (9), (10).

Идентификация модели. Формула (19) описывает целый класс процессов подобных рассматриваемому. Чтобы настроить эту функциональную зависимость на конкретную проблему, необходимо определить три параметра, входящих в выражение (19). Для этих целей воспользуемся экспериментальными данными и свойствами решения системы (9), (10). Данные экспериментов показывают, что $N_\infty = 49$. Кроме того, коэффициент роста известен и равен $\alpha = 1{,}2$ год$^{-1}$. Так как $N_\infty = \alpha / \beta$, то $\beta = \frac{\alpha}{N_\infty} = 0{,}02488$ ед$^{-1}$ год$^{-1}$. Теперь из формулы (19) можно найти начальную численность популяции карпов. Действительно, полагая в (19) $t = 1$ год и $N_1 = 18$ особей, получаем:

$$N_0 = \frac{N_1 N_\infty e^{-\alpha}}{N_\infty - N_1(1 - e^{-\alpha})} = 7 \text{ единиц особей.}$$

Для того чтобы убедиться в том, что формула (19) достаточно адекватно описывает динамику развития популяции карпов, были проведены расчеты по формуле (19), охватывающие диапазон по времени в 10 лет. Именно этот срок фигурирует в эксперименте. На рисунке 5 приведены результаты этих расчетов в виде сплошной кривой. Точками отмечены позиции, соответствующие экспериментальным данным.

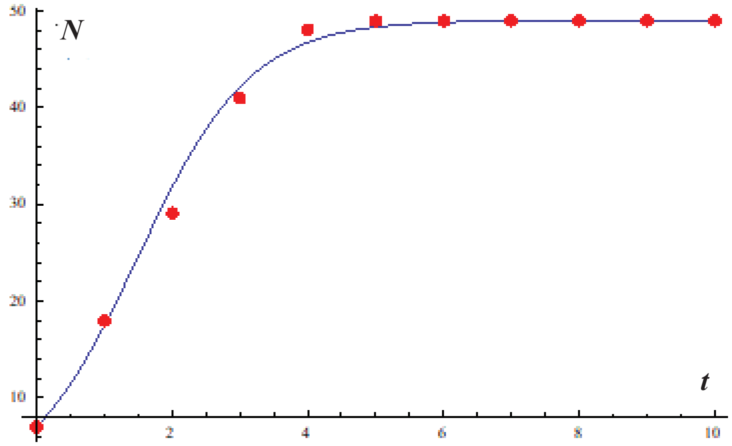

Рис. 5. Сравнение экспериментальных данных с теорией: сплошная линия — теория; точки — эксперимент

Из рисунка 5 видно, что полученная теоретическим путем кривая достаточно точно воспроизводит реальную динамику роста численности популяции карпов.

Отметим, что значение коэффициента роста в данной задачи задано лишь для того, чтобы облегчить процесс идентификации математической модели. В общем случае задачу можно усложнить, если из условий убрать заданное значение коэффициента роста. Этот случай будет ближе к практике, но процесс идентификации значительно усложнится. Чтобы определить неизвестные параметры, входящие в математическую модель, необходимо будет применить метод наименьших квадратов, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений значений теоретической кривой от значений, полученных по экспериментальным данным.

Планирование вычислительного эксперимента и анализ результатов эксперимента. Имея на руках готовую математическую модель, описывающую динамику изменения численности популяции карпов, можно достаточно обоснованно ответить на вопросы, сформулированные в трех заданиях, о которых говорилось при постановке задачи. В первом задании требуется дать ответ на вопрос о численности популяции карпов, если условия содержания карпов не будут меняться. При таком условии коэффициент роста не меняется и равен величине $\alpha = 1{,}2$ год$^{-1}$. Кроме того, коэффициент убыли тоже не меняется и равен $\beta = 0{,}02488$ ед$^{-1}$ год$^{-1}$, а значит, $N_\infty = 49$.

Таким образом, для ответа на вопрос достаточно вычислить значение функции $N(t)$ в момент времени $t = 20$. Можно предугадать, какой ответ будет получен. Действительно, из рисунка 4 видно, что численность популяции выходит на стационарный режим за первые 5 лет. Далее она сохраняется постоянной и равна 49. Если произвести вычисления по формуле (19), то получаем $N(20) = 49$, что полностью подтверждается проведенным расчетом.

Во втором задании необходимо ответить на вопрос о численности популяции через те же 10 лет, если будут улучшены условия содержания карпов так, что коэффициент роста увеличится в 2 раза. В этом случае: $\alpha = 2{,}4$ год$^{-1}$, $\beta = 0{,}02448$ ед$^{-1}$ год$^{-1}$, $N_\infty = \alpha / \beta = 98$. Учитывая время стабилизации численности популяции, можем утверждать, что после второго десятка лет популяция удвоится и будет содержать 98 особей. Для подтверждения этой цифры надо провести вычисления по формуле (19) при следующих исходных данных: $\alpha = 2{,}4$ год$^{-1}$, $\beta = 0{,}02448$ ед$^{-1}$ год$^{-1}$, $N_\infty = 98$, $N_0 = 49$. В результате получаем $N(20) = 98$. Выполненный расчет полностью подтверждает удвоение численности популяции в случае увеличения коэффициента роста.

Третье задание связано с загрязнением водоема нефтепродуктами. В этом случае увеличивается смертность в популяции карпов, что проявляется в увеличении коэффициента убыли в 10 раз. Следовательно, для расчета численности популяции в сложившихся условиях необходимо задать следующие исходные данные: $N_0 = 49$, $\alpha = 1{,}2$ год$^{-1}$, $\beta = 0{,}02448$ ед$^{-1}$ год$^{-1}$, $N_\infty = \alpha / \beta = 49$ ед. особей. При этом так же, как и предыдущих двух случаях, можно уже спрогнозировать результат: к концу второго десятилетия численность популяции карпов будет меньше, чем в самом начале ее создания. Число особей уменьшится до $N(20) = 4{,}9$ единиц.

В данных заданиях стоял вопрос о численности популяции на конкретный момент времени. Однако больший интерес, как правило, вызывает динамика возрастания и убывания исследуемой величины. Это связано, например, с управлением численностью популяции, то есть с установлением необходимых моментов времени, когда требуется изменить условия содержания карпов: почистить водоем, улучшить качество корма и т. д. Для примера были проведены расчеты для всех трех рассматриваемых случаев содержания популяции. Результаты вычислительного эксперимента приведены на рисунке 6.

На рисунке 6 изображены графики функции $N(t)$ при различных условиях содержания популяции. Точки на графике соответствуют значениям, полученным экспериментально. Из графика видно, что ситуация, описываемая кривой 3, чрезвычайно опасна для жизни всей популяции. Причем резкое снижение численности происходит в первый год после загрязнения водоема. Это говорит о том, что спасти популяцию возможно, если оперативно будут приняты меры по очистке водоема, иначе популяция карпов будет обречена на вымирание.

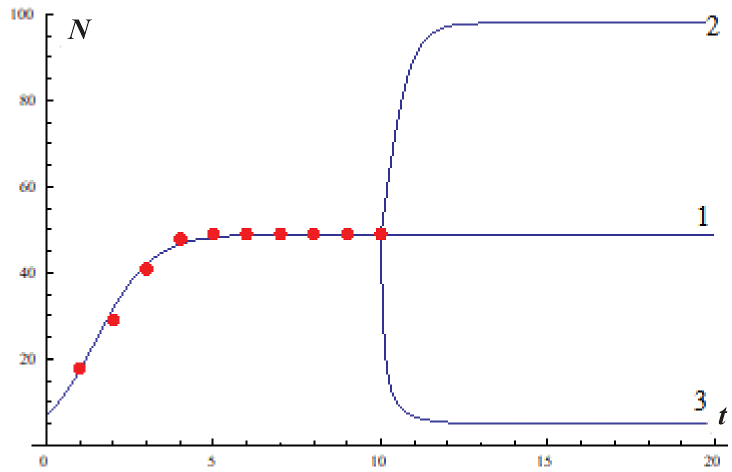

Рис. 6. Динамика развития популяции карпов при различных условиях ее содержания: кривая 1 соответствует первому заданию, 2 — второму заданию, 3 — третьему заданию

На данном этапе математического моделирования был использован компьютер для расчетов численности популяции. Кроме того, содержание этого раздела наталкивает на возможное обобщение компьютерной модели, в основе которой лежит формула (19), на случай, когда коэффициенты роста и убыли являются кусочно-постоянными функциями времени. Однако в рамках данной статьи мы не будем решать те новые задачи, которые могут возникать на каждом этапе математического моделирования, а ограничимся лишь констатацией этого факта, еще раз показывающего важность и полезность подхода к решению практико-ориентированных задач с позиций математического моделирования, демонстрируя логику научного познания.

Заключение

Следует отметить, что на современном уровне развития общества, в эпоху цифровизации, огромную роль в повышении конкурентоспособности каждого индивидуума в окружающем его мире играет математическая грамотность в современном ее понимании. Поэтому сегодня одной из главных задач образовательных учреждений, и особенно школ, где происходит воспитание и обучение человека как личности, является включение в эти процессы формирования математической грамотности.

Как было отмечено во введении к данной статье, главным аспектом концепции формирования математической грамотности является цикл моделирования (формулировать – применять – интерпретировать – оценивать). При этом основная роль учителя здесь состоит в том, чтобы научить обучающихся видеть в жизненной проблеме количественные связи, формулировать возникшую проблему на языке математики и, решив уже математическую задачу, давать обоснованное решение возникшей проблеме. За этими словами нетрудно увидеть те этапы математического моделирования, которые детально были разобраны в рамках предлагаемой статьи.

Неслучайно, что для иллюстрации основных этапов математического моделирования были использованы практико-ориентированные задачи, возникающие в различных сферах человеческой деятельности, поскольку они являются важным инструментом процесса формирования математической грамотности. Уже первая задача, связанная с построением садовой дорожки, в процессе решения знакомит читателей с основными этапами математического моделирования. Вторая задача, относящаяся к средней школе, интересна тем, что несмотря на свою простоту, она включает все этапы математического моделирования. Задача о захвате территории показывает, что первый этап моделирования может включать проведение экспериментальных работ, позволяющих в целом спрогнозировать решение поставленной задачи, а последующее математическое моделирование позволило в нашем случае подтвердить спрогнозированный результат. Решение задачи, связанной с определением возраста метеоритного вещества, уже содержит полноценные этапы математического моделирования и показывает, что даже довольно простая математическая модель физического явления может привести к построению методики определения нужных параметров, связанных с изучаемым явлением (в рассмотренной проблеме это было определение возраста метеоритного вещества).

Последняя задача была связана с разведением карпов и состояла она в том, чтобы научиться предсказывать размер их популяции в любой момент времени. По своему содержанию эта задача не нова. Различные ее интерпретации можно найти в Интернете[1]. Несмотря на это, задача с популяцией карпов привлекает внимание тем, что в ней имеются экспериментальные данные, из которых можно выстроить математическую модель, она хорошо укладывается в рамки математического моделирования с применением компьютера. Подробный разбор и соответствующий анализ каждого этапа математического моделирования этой проблемы показывают, что почти на каждом этапе моделирования могут возникать свои интересные задачи. Так, на втором этапе моделирования, где осуществляется постановка задачи, после определения количественных величин исследуемого процесса возникает вопрос о том, как связать эти величины. Ответ на этот вопрос дает либо известный общий закон (например, закон Мальтуса о росте популяций), либо закономерности, выявленные из анализа экспериментальных данных, как в случае разведения карпов. На третьем этапе, который посвящен реализации модели, довольно часто возникает математическая задача по доказательству корректности модели, а также задача оптимизационного характера, связанная с идентификацией модели. Решение этих задач требует соответствующей математической подготовки. На последнем этапе,

---

[1] URL: https://nsportal.ru/shkola/ekologiya/library/2012/01/23/ekologicheskaya-zadacha-deystvuyushchaya-model-razvedenie-karpov (дата обращения: 28.07.2021).

на котором формируется решение исходной задачи, может возникнуть необходимость в построении компьютерной модели и ее обобщений, направленных на решение более широкого класса задач.

Таким образом, подробный разбор каждого этапа математического моделирования, несомненно, поможет учителю сформировать у учащихся компетенции, позволяющие им более успешно адаптироваться к условиям жизни современного общества.

Литература

1. Денищева Л. О., Краснянская К. А., Рыдзе О. А. Подходы к составлению заданий для формирования математической грамотности учащихся 5–6 класса // Отечественная и зарубежная педагогика. 2020. Т. 2. № 2 (70). С. 181–201.

2. Зайцева Н. А. Математическое моделирование. М.: Институт транспортной техники и систем управления, 2017. 110 с.

3. Лукичева Е. Ю. Математическая грамотность: обзор понятия и методики формирования // Непрерывное образование. 2020. № 3 (33). С. 46–53.

4. Рослова Л. О. Проблема формирования способности «применять математику» в контексте уровней математической грамотности / Л. О. Рослова и др. // Отечественная и зарубежная педагогика. 2020. Т. 2. № 2 (70). С. 74–99.

5. Рослова Л. О., Краснянская К. А., Квитко Е. С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1. № 4 (61). С. 58–79.

6. Сафуанов И. С., Атанасян С. Л. Математическое образование в Сингапуре: традиции и инновации // Наука и школа. 2016. № 3. С. 38–44.

7. Сафуанов И. С., Поликарпов С. А. Сингапурская математика: школьные учебники // Нижегородское образование. 2016. № 1. С. 32–39.

8. Соколов С. В. Модели динамики популяций: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 61 с.

9. Chugunov V. A., Fomin S. A., Noland W., Sagdiev B.R. Tsunami runup on a sloping beach // Computational and Mathematical Methods. 2020. 2 (1). e1081.

10. De Lange J. Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective // Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. 2006. Vol. 25. P. 13–35.

11. Dubinsky E. Mathematical Literacy and Abstraction in the 21st Century // School Science and Mathematics. 2000. Vol. 100 (6). P. 289–297.

12. Geraniou E., Jankvist U. T. Towards a definition of «mathematical digital competency» // Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 29–45.

13. Kilpatrick J. Understanding Mathematical Literacy: The Contribution of Research // Educational Studies in Mathematics. 2001. Vol. 47 (1). P. 101–116.

14. Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

15. NCTM (1970/2002). A history of mathematics education in the United States and Canada. Vol 32. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1970.

16. NCTM. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

17. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited // Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 9–28.

18. Niss M., Jablonka E. Mathematical Literacy. In Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100

19. Ozkale A., Erdogan E. O. An analysis of the interaction between mathematical literacy and financial literacy in PISA // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2020. V. 51 (8). P. 1–22.

20. PISA 2021 Mathematics Framework Draft. OECD, 2018. URL: https://pisa2022-maths.oecd.org/#Home (дата обращения: 01.08.2021).

21. Sole M. A. Interdisciplinary Thinking: Financial Literacy Crosses Disciplinary Boundaries // PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 2021. Vol. 31 (2). P. 153–166.

22. Solomon Y. Mathematical Literacy: Developing Identities of Inclusion. New York: Routledge, 2009.

23. Steen L. A. The Case for Quantitative Literacy // In Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy. Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001. P. 1–22.

24. Weiland T. Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies // Educational Studies in Mathematics. 2017. Vol. 96. P. 33–47.

Literatura

1. Denishheva L. O., Krasnyanskaya K. A., Ry`dze O. A. Podxody` k sostavleniyu zadanij dlya formirovaniya matematicheskoj gramotnosti uchashhixsya 5–6 klassa // Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika. 2020. T. 2. № 2 (70). S. 181–201.

2. Zajceva N. A. Matematicheskoe modelirovanie. M.: Institut transportnoj texniki i sistem upravleniya, 2017. 110 s.

3. Lukicheva E. Yu. Matematicheskaya gramotnost`: obzor ponyatiya i metodiki formirovaniya // Neprery`vnoe obrazovanie. 2020. № 3 (33). S. 46–53.

4. Roslova L. O. Problema formirovaniya sposobnosti «primenyat` matematiku» v kontekste urovnej matematicheskoj gramotnosti / L. O. Roslova i dr. // Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika. 2020. T. 2. № 2 (70). S. 74–99.

5. Roslova L. O., Krasnyanskaya K. A., Kvitko E. S. Konceptual`ny`e osnovy` formirovaniya i ocenki matematicheskoj gramotnosti // Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika. 2019. T. 1. № 4(61). S. 58–79.

6. Safuanov I. S., Atanasyan S. L. Matematicheskoe obrazovanie v Singapure: tradicii i innovacii // Nauka i shkola. 2016. № 3. S. 38–44.

7. Safuanov I. S., Polikarpov S. A. Singapurskaya matematika: shkol`ny`e uchebniki // Nizhegorodskoe obrazovanie. 2016. № 1. S. 32–39.

8. Sokolov S. V. Modeli dinamiki populyacij: ucheb. posobie. SPb.: Izd-vo SPbGE`TU «LE`TI», 2018. 61 s.

9. Chugunov V. A., Fomin S. A., Noland W., Sagdiev B.R. Tsunami runup on a sloping beach // Computational and Mathematical Methods. 2020. 2 (1). e1081.

10. De Lange J. Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective // Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. 2006. Vol. 25. P. 13–35.

11. Dubinsky E. Mathematical Literacy and Abstraction in the 21st Century // School Science and Mathematics. 2000. Vol. 100 (6). P. 289–297.

12. Geraniou E., Jankvist U. T. Towards a definition of «mathematical digital competency» // Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 29–45.

13. Kilpatrick J. Understanding Mathematical Literacy: The Contribution of Research // Educational Studies in Mathematics. 2001. Vol. 47 (1). P. 101–116.

14. Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

15. NCTM (1970/2002). A history of mathematics education in the United States and Canada. Vol 32. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1970.

16. NCTM. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

17. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited // Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 9–28.

18. Niss M., Jablonka E. Mathematical Literacy. In Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100

19. Ozkale A., Erdogan E. O. An analysis of the interaction between mathematical literacy and financial literacy in PISA // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2020. V. 51 (8). P. 1–22.

20. PISA 2021 Mathematics Framework Draft. OECD, 2018. URL: https://pisa2022-maths.oecd.org/#Home (дата обращения: 01.08.2021).

21. Sole M. A. Interdisciplinary Thinking: Financial Literacy Crosses Disciplinary Boundaries // PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies. 2021. Vol. 31 (2). P. 153–166.

22. Solomon Y. Mathematical Literacy: Developing Identities of Inclusion. New York: Routledge, 2009.

23. Steen L. A. The Case for Quantitative Literacy // In Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy. Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001. P. 1–22.

24. Weiland T. Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies // Educational Studies in Mathematics. 2017. Vol. 96. P. 33–47.

L. O. Denishcheva, I. S. Safuanov,
Yu. A. Semenyachenko, A. V. Ushakov,
V. A. Chugunov

Mathematical Modeling is the Most Important Stage of the Formation of Mathematical Literacy in the Conditions of the Demands of Modern Society

The article discusses the educational and methodological aspects of the formation of mathematical literacy among students. Examples of practice-oriented tasks aimed at the formation of mathematical literacy are given.

Keywords: mathematical education; mathematical literacy; mathematical modeling; student.