УДК 373
DOI 10.25688/2072-9014.2021.57.3.01

Д. М. Златопольский

Перевод в двоичную систему обыкновенных дробей

В статье впервые в русскоязычной литературе описывается методика перевода в двоичную систему счисления ряда правильных обыкновенных дробей без промежуточного преобразования их в десятичные. Рассматривается перевод двух основных групп дробей — знаменатель которых равен $2^n - 1$ и $2^n + 1$. Во втором случае при переводе применяется оригинальный прием — использование условной отрицательной единицы с последующим исключением таких цифр. Опыт показал, что предложенная методика перевода для дробей указанного вида эффективнее традиционного метода.

Ключевые слова: информатика; двоичная система счисления; обыкновенные дроби; перевод в двоичную систему.

Известно, что для перевода в двоичную систему счисления правильных десятичных дробей используется метод последовательного умножения на 2 [1] (результат, как правило, получается приближенным[1]). А если стоит задача перевода обыкновенной дроби? Можно, конечно, сначала представить заданную дробь в виде десятичной, а затем применить указанный метод. Но возможен и другой вариант. Опишем его.

Начнем с дробей, числитель которых равен 1.

Пусть надо перевести в двоичную систему дробь $\frac{1}{7}$.

Оставляя пока за скобками обоснование, можно так описать методику перевода. Знаменатель 7 на *1 меньше третьей* степени двойки (8). Поэтому в двоичной системе указанная дробь является периодической с периодом (001): 0,(001):

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10} = 0{,}001001001001001\ldots_2.$$

[1] Десятичные дроби, равные отрицательной степени числа 2, в двоичную систему переводятся точно.

Аналогично для других значений знаменателей, на 1 меньших степени двойки, имеем:

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{10} = 0{,}(01)_2,$$

$$\left(\frac{1}{15}\right)_{10} = 0{,}(0001)_2$$

и т. д.

Покажем, что действительно

$$0{,}001001001001001\ldots_2 = \left(\frac{1}{7}\right)_{10}.$$

Десятичное значение периодической дроби 0,001001001001001… можно записать в виде:

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}+\ldots$$

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, можно получить, что указанная сумма равна

$$\frac{1}{2^3-1}=\frac{1}{7}.$$

Аналогично можно показать справедливость и остальных приведенных двоичных значений.

Приведем (также без доказательства) запись в двоичной системе дроби $\left(\frac{1}{17}\right)$:

$$\left(\frac{1}{17}\right)_{10} = 0{,}000011110000111100001111\ldots_2 = 0{,}(00001111)_2.$$

Здесь методику перевода можно описать следующим образом (опять без обоснования). Знаменатель 17 на *1 больше четвертой* степени двойки (16). Поэтому в двоичной системе указанная дробь является периодической с 8-значным периодом такого вида: сначала идут 4 нуля, затем 4 единицы: 0,(00001111).

Аналогично для других значений знаменателей, на 1 больших степени двойки, имеем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)_{10} = 0{,}(0011)_2,$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}(000111)_2,$$

и т. д.

После приведенных примеров перевод дроби $\frac{2}{7}$ в двоичную систему становится достаточно очевидным — для умножения двоичного представления дроби на 2 следует сместить запятую на один разряд правее:

$$\left(\frac{2}{7}\right)_{10} = 0{,}01001001001\ldots_2.$$

Аналогично проводится перевод дробей с двумя рассмотренными видами знаменателей, числитель которых является степенью двойки:

$$\left(\frac{8}{17}\right)_{10} = 0{,}011110000111100001111\ldots_2,$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)_{10} = 0{,}011100011101110001110111000111\ldots_2.$$

А если числитель не такой? В этих случаях придется рассмотреть два варианта.

Если знаменатель дроби равен $2^n - 1$, где n — натуральное число, то задача решается достаточно просто — нужно в двоичном представлении дроби $\frac{1}{2^n - 1}$ вместо периодической части записать двоичное представление числителя. Например, для дроби $\frac{5}{7}$ имеем:

$$\left(\frac{1}{7}\right)_{10} = 0{,}001001001001001\ldots_2,$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)_{10} = 0{,}101101101101\ldots_2.$$

Для дроби $\frac{9}{15}$:

$$\left(\frac{1}{15}\right)_{10} = 0{,}000100010001\ldots_2,$$

$$\left(\frac{9}{15}\right)_{10} = 0{,}100110011001\ldots_2.$$

Когда же знаменатель дроби равен $2^n + 1$, задача усложняется. Для нахождения двоичного представления дроби $\frac{5}{9}$ нельзя, как в рассмотренных выше случаях, заменить какие-то цифры двоичным числом, равным 5:

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}000111000111000111\ldots_2,$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} \neq 0{,}010111010111010111\ldots_2.$$

Как же быть? Здесь нам на помощь приходит прием, предложенный в XIX (!) веке в работе [2]. В ней автор вводит понятие отрицательной цифры 1 (обозначая ее $\overline{1}$).

Рассмотрим двоичное число, состоящее из одних единиц:

$$1111.$$

Нетрудно увидеть, что это число на 1 меньше двоичного числа 10000. Это значит, что исходное число 1111, используя цифру $\overline{1}$, можно представить следующим образом:

$$1000\overline{1}.$$ [2]

Можно так сформулировать правило записи цифры $\overline{1}$ в двоичном числе: в группе цифр, состоящей из последовательных единиц, следует:

1) добавить единицу в разряде слева от крайней слева единицы группы;
2) крайнюю справа единицу группы заменить на $\overline{1}$;
3) вместо промежуточных единиц группы записать нули.

Это правило применимо ко всем цепочкам из одних единиц, в том числе и расположенных в дробной части двоичного числа:

$$1001110011110 = 10100\overline{1}01000\overline{1}0,$$
$$0{,}01110\ 01110 = 0{,}100\overline{1}0100\overline{1}0.$$

Вернемся к переводу дробей. Вспомним, что

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}000111000111000111\ldots_2.$$

Заменим все цепочки из единиц и получим:

$$\left(\frac{1}{9}\right)_{10} = 0{,}00100\overline{1}00100\overline{1}00100\overline{1}\ldots$$

А теперь для нахождения двоичного представления $\frac{5}{9}$ только что полученную дробь можно умножать на 5, используя двоичное число 101:

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} = 0{,}101\overline{1}0\overline{1}101\overline{1}0\overline{1}101\overline{1}0\overline{1}\ldots$$

[2] Заметим, что двоичное число, в котором имеются отрицательные единицы, переводится в десятичную систему так же, как и обычное двоичное число, за исключением того, что на весомость того или иного разряда в ряде разрядов умножается –1:

$$100\overline{1}01_2 = 1 \times 32 + -1 \times 4 + 1 \times 1 = 29_{10},$$

то есть при расчетах используется алгебраическая сумма.

Но нас интересует, естественно, обычное двоичное число. Как получить его? Для этого надо научиться исключать из двоичной записи чисел цифру $\overline{1}$. Посмотрим, что надо делать.

Для цепочек вида $1\overline{1}$, $10\overline{1}$, $100\overline{1}$, $1000\overline{1}$, $10000\overline{1}$ и т. п. методика исключения достаточно очевидна:

$$01,\ 011,\ 0111,\ 01111,\ 011111,\ \ldots$$

Сложный случай исключения имеет вид:

$$101\overline{1}0\overline{1}0 \text{ (две цифры } \overline{1} \text{ разделены нулем).}$$

Для него задача решается в два этапа:

1) избавляемся от первой слева цифры $\overline{1}$:

$$10010\overline{1}0;$$

2) после этого можно исключить и оставшуюся (см. выше пример для цепочки $10\overline{1}$):

$$1000110.$$

(Проверьте, что $101\overline{1}0\overline{1}0 = 1000110 = 70$!)

И теперь можем получить искомый ответ для дроби $\frac{5}{9}$:

$$\left(\frac{5}{9}\right)_{10} = 0{,}101\overline{1}0\overline{1}101\overline{1}0\overline{1}101\overline{1}0\overline{1}\ldots = 0{,}10010\overline{1}10010\overline{1}10010\overline{1}\ldots =$$

$$= 0{,}100011100011100011\ldots = 0{,}(100011).$$

На первый взгляд, описанная методика перевода является громоздкой и трудоемкой. Чтобы убедиться, что это не так, предлагаем сравнить время, требуемое для перевода в двоичную систему счисления дроби $\frac{15}{63}$ двумя методами — описанным и с промежуточным преобразованием в десятичную дробь[3].

Кроме того, читатель может возразить, что методика применима только к обыкновенным дробям, знаменатели которых равны $2^n - 1$ или $2^n + 1$. Во-первых, это не совсем так, вот, например, результат перевода дроби $\left(\frac{1}{89}\right)$, полученный описанным методом[4]:

$$0{,}0000001011100000010111\ldots\ .$$

---

[3] Преподаватель может предложить это сделать своим ученикам.

[4] Обоснование результата этого примера и других автор оставляет за рамками статьи.

Во-вторых, в демонстрационных вариантах ЕГЭ по информатике и ИКТ[5] задания на определение количества нулей и количества единиц в двоичном числе, так же как правило, связаны со значениями $2^n - 1$ и $2^n + 1$.

Литература

1. Андреева Е. В., Босова Л. Л., Фалина И. Н. Математические основы информатики. Элективный курс. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 328 с.

2. Collignon E. Note sur l'arithmetique binaire // Journal de mathematiques elementaires. 1897. P. 148–151.

Literatura

1. Andreeva E. V., Bosova L. L., Falina I. N. Matematicheskie osnovy informatiki. Electivnyi kurs. M.: BINOM. Laboratoriya znanij, 2005. 328 s.

2. Collignon E. Note sur l'arithmetique binaire // Journal de mathematiques elementaires, 1897. P. 148–151.

D. M. Zlatopolski

Translating a of Ordinary Fractions into a Binary Number System

For the first time in the Russian-language literature, the article describes a technique for translating a number of regular ordinary fractions into a binary number system without intermediate conversion to decimal. We consider the translation of two main groups of fractions — the denominator of which is equal to $2^n - 1$ and $2^n + 1$. In the second case, the translation uses an original technique — the use of a conventional negative unit with the subsequent exclusion of such digits. Experience has shown that the proposed translation method for fractions of this type is more effective than the traditional method.

Keywords: informatics; binary number system; ordinary fractions; translating into a binary number system.

[5] Демоверсии, спецификации, кодификаторы [Электронный ресурс] // Федеральный институт педагогических измерений: официальный сайт. URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-5 (дата обращения: 24.11.2020).