УДК 378

Г.Д. Гефан

Обучение математической теории игр с применением игровых и компьютерных технологий

Знакомство со сложными математическими теориями часто вызывает у студентов потребность в конкретных и доступных примерах и иллюстрациях. Помочь в этом могут игровые методы обучения, усиленные компьютерными реализациями. В статье показано, как организовать такие занятия при изучении математической теории игр. Благодаря неформальному игровому подходу к организации занятий, они приобретают дух состязательности, азарта и результативного творчества.

Ключевые слова: игровой метод обучения; математическая теория игр; оптимальные смешанные стратегии; задача линейного программирования; процессор MS Excel.

Важным вопросом теории игр является вопрос о так называемой оптимальной стратегии, которая гарантирует игроку наибольший средний выигрыш. В матричной игре, вообще говоря, для этого необходимо применять «чистые» стратегии стохастически, в соответствии с некоторым законом распределения вероятностей (оптимальная смешанная стратегия, в дальнейшем обозначаемая нами как ОСС). Когда обе стороны придерживаются своих ОСС, в игре возникает ситуация равновесия: отказ одного из игроков от ОСС не может увеличить его средний выигрыш. Вид ОСС, т. е. вероятности применения «чистых» стратегий, можно получить решением задачи линейного программирования.

Донося до студентов сложные математические идеи, подобные изложенной, необходимо подкреплять их доступными и убедительными иллюстрациями. В этом могут помочь игровые методы обучения, характеризующиеся эмоционально напряженной, состязательной деятельностью и высокой ответственностью каждого участника команды за общий результат [1; 5–7; 9]. Следует отметить, что как при теоретическом решении матричных игр с произвольным числом стратегий, так и при эмпирическом оценивании средних выигрышей игроков трудно обойтись без компьютера. Цель данной статьи — показать особенности организации проведения таких занятий, в ходе которых студенты получали бы опыт решения матричных игр в смешанных стратегиях, а также яркое практическое подтверждение положений теории игр. Инструментом обучения является игровой метод, опирающийся в данном случае на компьютерные реализации.

Рассмотрим несколько подробнее математическую сторону проблемы. Пусть у игрока «A» существуют чистые стратегии A_1, A_2, …, A_m, применение которых характеризуется вектором вероятностей

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_m),\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1, m},$$

а у игрока B — стратегии B_1, B_2, …, B_n, применяемые в соответствии с вектором вероятностей

$$\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n),\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ 0 \le y_j \le 1,\ j = \overline{1, n}.$$

В такой ситуации говорят о применении игроками смешанных стратегий. Обозначим через $M(A, \bar{x}, \bar{y})$ математическое ожидание выигрыша (средний выигрыш) игрока «A» при применении записанных смешанных стратегий. Если матрица игры равна

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$M(A, \bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\,. \qquad (1)$$

В теории игр известен принцип осторожности (или принцип минимакса), который может быть сформулирован как для чистых, так и для смешанных стратегий [2; 3]. Согласно этому принципу, игрок «A» выбором смешанной стратегии $\bar{x}$ стремится максимизировать свой гарантированный результат:

$$\alpha = \max_{\bar{x}}\ \min_{\bar{y}} a_{ij} \qquad (2)$$

(нижняя цена игры). Игрок «B» выбором $\bar{y}$ стремится сделать выигрыш игрока «A» не больше величины

$$\beta = \min_{\bar{y}}\ \max_{\bar{x}} a_{ij} \qquad (3)$$

(верхняя цена игры).

Смешанная стратегия игрока «*A*» $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ и смешанная стратегия игрока «*B*» $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ составляют пару ОСС, если для $M(A, \overline{x}, \overline{y})$ выполняется

$$M(A, \overline{x}, \overline{y}^*) \le M(A, \overline{x}^*, \overline{y}^*) \le M(A, \overline{x}^*, \overline{y}). \qquad (4)$$

Это и есть ситуация равновесия: если один из игроков применяет свою ОСС, то и второму игроку для наилучшего среднего выигрыша не следует отступать от своей ОСС. Согласно теореме фон Неймана, для любой игры с платежной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ существует хотя бы одна пара ОСС $\overline{x}^*$, $\overline{y}^*$, для которой

$$v \equiv M(A, \overline{x}^*, \overline{y}^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* = \alpha = \beta .$$

Величина *v* называется ценой игры. В руководствах по матричным играм обычно останавливаются на решении простейших игр, в которых хотя бы один из игроков имеет только 2 чистых стратегии. Дело в том, что в этом случае возможна несложная геометрическая интерпретация решения. Нам кажется более интересным и важным рассматривать универсальный способ решения любой игры *m* × *n*. Согласно ему, для игрока «*A*» выбор ОСС приводит к задаче линейного программирования

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i = \frac{1}{\nu} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \ge 1, \;\; j = \overline{1, n}, \;\; X_i \ge 0, i = \overline{1, m}, \qquad (5)$$

где $X_i = \dfrac{x_i}{v}$, $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)$. Для игрока «*B*»

$$g(\overline{Y}) = \sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{\nu} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j \le 1, i = \overline{1, m}, \;\; Y_j \ge 0, \; j = \overline{1, n}, \qquad (6)$$

где $Y_i = \dfrac{y_i}{v}$, $\overline{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

Сравнивая задачи (5) и (6), видим, что это симметричная пара взаимно двойственных задач.

Для решения задач линейного программирования в MS Excel существует надстройка «Поиск решения». Студенты могут освоить ее в рамках лабораторного практикума или самостоятельно [4; 10].

Перейдем к описанию обучающей игры, основанной на состязаниях между студенческими командами с применением компьютерной технологии. Организацию и функционирование студенческих команд в ходе учебного процесса мы описывали ранее применительно к другим формам интерактивного обучения — деловым играм и математическим боям [5–7]. Студенческим командам можно предложить сыграть в игру с нулевой суммой (в этом случае выигрыш одной команды равен проигрышу другой), с известной платежной матрицей. Для примера рассмотрим матрицу выигрышей команды «*A*» в виде:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1,2	5,2	–0,8	1,2	3,2
A_2	–4,8	–2,8	3,2	4,2	–1,8
A_3	–4,8	–0,8	–2,8	0,2	–3,8
A_4	4,2	3,2	–3,8	5,2	3,2

Итак, команда «*A*» имеет 4 «чистых» стратегии, а команда «*B*» — 5. Подготовка и проведение обучающей игры разбивается на 3 этапа.

Этап 1. До занятия

1. К игре готовятся 2 или более команд. Каждая из команд знает, какая роль («*A*» или «*B*») ей может достаться. Например, если в подготовке участвуют 4 команды, то 2 из них могут получить роль «*A*», остальные 2 — роль «*B*».

2. Игра должна состояться 50 раз. Разумеется, на занятии этот процесс занял бы слишком много времени. Поэтому каждой команде предлагается сразу записать ряд из 50 стратегий. Этот ряд команда должна составить любым доступным ей способом. Она может найти свою ОСС с помощью компьютера или определить ее наугад, разыграть номера стратегий по методу Монте-Карло или просто задать частоты стратегий в соответствии с некоторым распределением вероятностей и т. д.

4. Ряд стратегий, подготовленный командой, должен быть неизвестен противникам. В случае рассекречивания этой информации конкурирующая сторона подберет свой ряд стратегий так, чтобы иметь оптимальный результат в каждой игре.

5. Команды не имеют права использовать какую-то из своих стратегий как единственную или явно преобладающую над другими (например, 45 или более раз из 50). Дело в том, что в условиях реальной игры противник, заметив, что вы почти всегда применяете одну и ту же стратегию, легко найдет оптимальный ответ на нее.

Еще раз поясним, что при определении своего ряда стратегий команды пользуются знаниями и навыками, полученными ими к моменту игры. Им уже должны быть известны возможности решения матричной игры в смешанных стратегиях как двойственной задачи линейного программирования и способы реализации ОСС. Тем не менее они вправе пренебречь рекомендациями теории игр и действовать согласно собственным соображениям или интуиции. Одна из целей занятия как раз и состоит в том, чтобы выяснить, к чему это приведет.

Этап 2. Игра

1. В начале занятия преподаватель определяет 2 команды для участия в игре.
2. Команды представляют свои ряды стратегий.
3. Составляется таблица, в которой (с участием всей группы) определяется выигрыш игрока «*A*» в каждой из 50 игр. К примеру, эта таблица может иметь следующий вид:

Номер игры	Стратегии команд		Выигрыш команды «*A*»
1	A_2	B_3	3,2
2	A_4	B_3	–3,8
3	A_2	B_5	–1,8
…	…	…	…
50	A_1	B_1	1,2

4. Рассчитывается фактический средний выигрыш игрока «*A*» во всей серии. Этот результат, как правило, отражает ту работу, которую проделывают команды на этапе подготовки.

Этап 3. Анализ игры

1. Определяются частоты, с которыми команды использовали свои чистые стратегии. Считается, что тем самым они реализовали определенные смешанные стратегии. Например, если команда «*A*» применила стратегию A_1 40 раз и стратегию A_2 10 раз, то она реализовала смешанную стратегию (4/5, 1/5, 0, 0). Если команда «*B*» каждую из своих возможных стратегий применила по 10 раз из 50, то она реализовала смешанную стратегию (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5).

2. Вычисляется теоретический средний выигрыш игрока «*A*» при применении смешанных стратегий. Для приведенного выше примера:

$$M(A,\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_i y_j = 1{,}52\,.$$

3. Фактический результат, как правило, не будет совпадать с теоретическим. Этому факту должно быть найдено объяснение. Для этого рассчитывается среднее квадратическое отклонение выигрыша команды «*A*», а затем среднее квадратическое отклонение среднего арифметического выигрыша команды «*A*» в 50 опытах. Для того же примера:

$$\sigma(A,\bar{x},\bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}^2 x_i y_j - M^2(A,\bar{x},\bar{y})\right)^{1/2} = 2{,}588\,,$$

$$\sigma\left(\bar{A},\bar{x},\bar{y}\right. = \frac{\sigma(A,\bar{x},\bar{y})}{\sqrt{50}} = 0{,}366\,.$$

Согласно центральной предельной теореме, средний выигрыш в 50 опытах — это случайная величина, имеющая распределение, близкое к нормальному. Поэтому интервал, внутри которого должен оказаться средний выигрыш, можно оценить по правилу «трех сигма». Таким образом, можно подсчитать, что средний выигрыш команды «*A*» в 50 опытах должен находиться в пределах от 0,42 до 2,62.

Если примененные одной или обеими командами смешанные стратегии не являются оптимальными, преподаватель приводит ОСС. В нашей задаче: ОСС для команды «*A*» — (4/5, 1/5, 0, 0), ОСС для команды «*B*» — (2/5, 0, 3/5, 0, 0). Таким образом, в рассмотренном примере команда «*A*» играла свою ОСС, команда «*B*» — нет. Согласно приведенным выше оценкам, в этом случае выигрыш команды «*A*» практически неизбежен.

В заключение для пары ОСС вычисляется математическое ожидание выигрыша команды «*A*». Платежная матрица должна быть подобрана так, чтобы оно оказывалось равным нулю. Таким образом, при применении обеими командами своих ОСС их шансы будут равны.

Каким бы ни был исход игры, фактический выигрыш будет включать две составляющие: (1) «стохастически детерминированную» [8], за счет выбора смешанных стратегий; (2) случайную, за счет реальных комбинаций чистых стратегий в каждой из 50 игр (элемент везения).

Описанная обучающая игра по теории матричных игр обладает тем интересным свойством, что оценка действий команды абсолютно объективна (в том смысле, что преподаватель лишь беспристрастно фиксирует результат, в отличие, скажем, от математического боя, где он является арбитром). С другой стороны, результат команды здесь не на все 100 % зависит от ее действий, но включает также случайную составляющую (элемент везения). Полагаем, что присутствие «азартной» составляющей в обучающей игре не должно смущать: во-первых, потому что мы знаем, сколь значительную роль сыграли азартные игры в возникновении и становлении теории вероятностей; во-вторых, потому что соревновательный азарт — это чрезвычайно эффективный элемент технологии интерактивного обучения. Необходимо также отметить, что данное мероприятие характеризуется (по нашему наблюдению) исключительной доброжелательностью участников и стремлением к обмену знаниями и позитивным опытом.

Дидактическое значение занятий такого рода состоит в том, что они прививают уважение к объективному знанию. Студенты могут не учитывать рекомендации теории игр и действовать, полагаясь на собственную интуицию, выбирая стратегию «на глаз». В этом случае студентов ждет разочарование: скорее всего, даже небольшое отклонение команды от ОСС приведет ее к проигрышу. Впрочем, редкие исключения, как говорят в таких случаях, только подтверждают правило, поскольку они вполне укладываются в тот разброс возможных результатов, который предсказывает теория вероятностей.

Литература

1. *Бельчиков Я.М., Бирштейн М.М.* Деловые игры. Рига: Авотс, 1989. 304 с.

2. *Вентцель Е.С.* Элементы теории игр. М.: Физматгиз, 1961. 68 с.

3. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Высшая школа, 2001. 208 с.

4. *Гефан Г.Д.* Экономико-математические методы и модели. Курс математики, ориентированный на использование компьютера: учебное пособие. Часть 1: Некоторые методы исследования операций. Иркутск: ИрГУПС, 2010. 208 с.

5. *Гефан Г.Д.* О возможности проведения деловых игр при изучении математических дисциплин в техническом вузе // Проблемы учебного процесса в инновационных школах. Вып. 18. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. С. 38–46.

6. *Гефан Г.Д.* Математические бои как часть учебного процесса в вузе (на примере преподавания теории вероятностей) // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2015. Вып. 7 (160). С. 96–101.

7. *Гефан Г.Д.* Оптимальный алгоритм рейтинговой оценки студенческих команд при проведении состязаний по математическим дисциплинам в ходе учебного процесса // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2015. № 1 (31). С. 37–44.

8. *Гефан Г.Д.* Теория вероятностей и математическая статистика: историко-философские аспекты в преподавании дисциплины // Омский научный вестник. 2015. № 1 (135). С.123–126.

9. *Гефан Г.Д.* Игровые методы обучения вероятностно-статистическим дисциплинам // Арбузова Е.Н., Гефан Г.Д., Дубова М.А. и др. Предметное образование. М.: РусАльянс, 2016. С. 14–21.

10. *Гефан Г.Д., Кузьмин О.В.* Активное применение компьютерных технологий в преподавании вероятностно-статистических дисциплин в техническом вузе // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2014. № 1 (27). С. 57–61.

Literatura

1. *Bel'chikov Ya.M., Birshtejn M.M.* Delovy'e igry'. Riga: Avots, 1989. 304 s.

2. *Ventcel' E.S.* E'lementy' teorii igr. M.: Fizmatgiz, 1961. 68 s.

3. *Ventcel' E.S.* Issledovanie operacij. Zadachi, principy', metodologiya. M.: Vy'sshaya shkola, 2001. 208 s.

4. *Gefan G.D.* E'konomiko-matematicheskie metody' i modeli. Kurs matematiki, orientirovanny'j na ispol'zovanie komp'yutera: uchebnoe posobie. Chast' 1: Nekotory'e metody' issledovaniya operacij. Irkutsk: IrGUPS, 2010. 208 s.

5. *Gefan G.D.* O vozmozhnosti provedeniya delovy'x igr pri izuchenii matematicheskix disciplin v texnicheskom vuze // Problemy' uchebnogo processa v innovacionny'x shkolax. Vy'p. 18. Irkutsk: Izd-vo IGU, 2013. S. 38–46.

6. *Gefan G.D.* Matematicheskie boi kak chast' uchebnogo processa v vuze (na primere prepodavaniya teorii veroyatnostej) // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. 2015. Vy'p. 7 (160). S. 96–101.

7. *Gefan G.D.* Optimal'ny'j algoritm rejtingovoj ocenki studencheskix komand pri provedenii sostyazanij po matematicheskim disciplinam v xode uchebnogo processa // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2015. № 1 (31). S. 37–44.

8. *Gefan G.D.* Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika: istoriko-filosofskie aspekty v prepodavanii discipliny' // Omskij nauchny'j vestnik. 2015. № 1 (135). S.123–126.

9. *Gefan G.D.* Igrovy'e metody' obucheniya veroyatnostno-statisticheskim disciplinam // Arbuzova E.N., Gefan G.D., Dubova M.A. i dr. Predmetnoe obrazovanie. M.: RusAl'yans, 2016. S. 14–21.

10. *Gefan G.D., Kuz'min O.V.* Aktivnoe primenenie komp'yuterny'x texnologij v prepodavanii veroyatnostno-statisticheskix disciplin v texnicheskom vuze // Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.P. Astaf'eva. 2014. № 1 (27). S. 57–61.

G.D. Gefan

Teaching the Mathematical Theory of Games with the Use of Game and Computer Technologies

Acquaintance with complex mathematical theories often causes the need of concrete and accessible examples and illustrations at students. Gaming methods of education, enhanced by computer implementations can help in this procedure. The article shows how to organize such classes in the study of the mathematical theory of games. Thanks to the informal game approach to the organization of classes, they acquire a spirit of competition, excitement and effective creativity.

Keywords: gaming method of training; mathematical theory of games; optimal mixed strategies; linear programming problem; processor MS Excel.