УДК 378.014.015.62+517.9

В.С. Корнилов

Формирование фундаментальных знаний по математическому моделированию при обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений

В статье акцентируется внимание читателя на том, что осваивая теорию и методологию исследования обратных задач для дифференциальных уравнений, студенты получают фундаментальные знания в области математического моделирования процессов и явлений. Излагаются методические подходы, позволяющие студентам не только освоить математические методы решения обратных задач, но и приобрести умения и навыки построения и анализа математических моделей обратных задач. Для наглядности приводятся математические модели обратных задач.

Ключевые слова: математическое моделирование; обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений; прикладная математика; студент.

Математическое моделирование с использованием дифференциальных уравнений является эффективным инструментом исследования различных процессов и явлений, происходящих в водной и земной среде, воздушном и космическом пространстве. Развитие математических методов мировой науки усиливает научно-познавательный потенциал таких дифференциальных математических моделей.

Уже более полувека в России и за рубежом активно развивается теория обратных задач для дифференциальных уравнений (см., например, [2–4; 6; 15–19]), являющаяся одной из научных областей современной прикладной математики. В настоящее время в некоторых российских вузах для студентов физико-математических и естественнонаучных направлений подготовки преподаются учебные курсы по выбору, посвященные обратным задачам для дифференциальных уравнений (см., например, [2–12; 20]).

Обучение студентов глубоким знаниям в области обратных задач для дифференциальных уравнений является сейчас одной из актуальных задач системы высшего математического образования. Необходимость эта связана прежде всего с потребностями практики. С каждым годом обнаруживается все большее количество приложений обратных задач. Такие задачи сейчас возникают практически во всех областях естествознания: геофизике, астрономии, ядерной физике, химии, биологии и т. д. К необходимости решения обратных задач для дифференциальных уравнений приводят проблемы неразрушающего контроля промышленных изделий, медицинской диагностики, изучения новых свойств материалов.

При обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений большое внимание уделяется не только математическим методам решения обратных задач, но и построению и анализу самих математических моделей обратных задач, приведению их к виду, удобному для исследования.

Пример 1. Рассматривается прямолинейный проводник (вытянутый по оси x), у которого емкость C, омическое сопротивление R и индуктивность L — постоянны, а утечка изоляции проводника $G(x)$ моделируется непрерывной функцией точки x. При подключении этого проводника к переменному напряжению $V(x, t)$, по нему начинает течь переменный ток $j(x, t)$ [16].

Известно, что в этом случае процесс распространения электрических колебаний в таком проводнике моделируется двумя дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} &C\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + G(x)V(x,t) = 0, \\ &\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + L\frac{\partial j(x,t)}{\partial t} + R\,j(x,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Студентам сообщается о том, что с практической точки зрения большой интерес представляет вычисление утечки изоляции $G(x)$ данного проводника.

Прежде чем сформулировать обратную задачу вычисления неизвестной функции $G(x)$ из дифференциальных уравнений (1), целесообразно преобразовать эти дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка в гиперболическое уравнение, так как для обратных задач для гиперболических уравнений разработаны эффективные методы их решения. Такое уравнение можно получить, если продифференцировать первое уравнение в (1) по переменной t и умножить на константу L, а второе уравнение в (1) продифференцировать по переменной x и затем сложить полученные равенства:

$$LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial V}{\partial t} + g(a(x))V, \tag{2}$$

где

$$a(x) = -[RC + LG(x)],\ g(a(x)) = (R / L)\,[a(x) + RC]. \tag{3}$$

Заметим, что неизвестная функция $G(x)$ в силу условных обозначений вошла в состав функции $a(x)$.

Студентам поясняется, что уравнение (2) еще не является математической моделью, описывающей распространение электрических колебаний в прямолинейном проводнике, когда по нему течет переменный ток. Еще необходимо сформулировать краевые условия, т. е. начальные и граничные условия. Студентам поясняется, что, так как процесс распространения электрических колебаний инициирован импульсным источником, то в качестве начального условия естественно взять данные Коши вида

$$V|_{t<0} \equiv 0. \tag{4}$$

При формировании граничного условия студентам объясняется, что необходимо учесть наличие импульсного источника, который хорошо моделируется обобщенными функциями, в частности дельта-функцией Дирака. Таким граничным условием может быть условие вида

$$V_x(0, t) = \delta(t), \tag{5}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Таким образом, сформирована математическая модель (2)–(5), описывающая распространение электрических колебаний в прямолинейном проводнике, которая в теории обратных задач называется прямой задачей для дифференциального уравнения.

Для математической постановки обратной задачи вычисления неизвестной функции $a(x)$, необходимо сформулировать дополнительную информацию о решении прямой задачи (2)–(5). Такой дополнительной информацией может являться информация вида

$$V(0, t) = f(t),\ t \geq 0. \tag{6}$$

Приведем математическую постановку обратной задачи. Из дифференциального уравнения (2) при начальных и граничных условиях (4), (5) определить неизвестную функцию $a(x)$ в области $x \geq 0$ при условии, что известна дополнительная информация вида (6). Сформулированная обратная задача исследована В.Г. Романовым [16].

Пример 2. Осознание физического смысла прикладных задач, исследуемых при помощи математических моделей обратных задач, является важным аспектом теории и методологии обратных задач. На учебных занятиях на это обстоятельство обращается большое внимание. Студентам доводятся сведения о том, что без глубокого анализа физической модели можно допустить ошибку при формировании математической модели обратной задачи для дифференциального уравнения и в дальнейшем по полученным результатам сделать ошибочные логические выводы прикладного характера.

В качестве примера рассмотрим один из разделов содержания обучения обратным задачам, посвященный обратным задачам для системы уравнений Максвелла.

Рассматривается система уравнений Максвелла (см., например, [4; 12; 13; 17; 18])

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \sigma \vec{E} + \vec{j},\quad rot\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \tag{7}$$

при начальных условиях вида

$$\vec{E}\big|_{t<0} \equiv 0,\ \vec{H}\big|_{t<0} \equiv 0,\ \vec{j}\big|_{t<0} \equiv 0. \tag{8}$$

В (7), (8) $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$, $\vec{H} = \left(H_x, H_y, H_z\right)$ — векторы электрической и магнитной напряженности поля соответственно; $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\sigma \geq 0$ —

диэлектрическая проницаемость среды, магнитная проницаемость среды и проводимость среды соответственно; $\vec{j} = \left(j_x , j_y , j_z \right)$ — плотность тока внешнего импульсного источника,

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим известную физическую модель среды, в которой поверхность Земли считается плоской, а физическое пространство R^3 переменных x, y, z состоит из воздушного пространства $R_-^3 = \left\{ x \in R,\ y \in R,\ z < 0 \right\}$ и земной среды $R_+^3 = \left\{ x \in R,\ y \in R,\ z > 0 \right\}$, которые разделяются плоскостью $z = 0$.

Кроме того, будем полагать, что коэффициенты системы уравнений Максвелла (7) ε, μ, σ в воздушном пространстве R_-^3 являются постоянными, в земной среде R_+^3 являются гладкими функциями точки $(x, y, z) \in R_+^3$, а на границе областей R_-^3 и R_+^3 значения этих коэффициентов претерпевают конечный скачок. При этом равенства (7) для векторов $\vec{E}, \vec{H}$ имеют место быть для $(x, y, z) \in R_-^3$ и $(x, y, z) \in R_+^3$, а при $z = 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0+} E_x(x,y,z,t) &= \lim_{z\to 0-} E_x(x,y,z,t), \\ \lim_{z\to 0+} E_y(x,y,z,t) &= \lim_{z\to 0-} E_y(x,y,z,t), \\ \lim_{z\to 0+} H_x(x,y,z,t) &= \lim_{z\to 0-} H_x(x,y,z,t), \\ \lim_{z\to 0+} H_y(x,y,z,t) &= \lim_{z\to 0-} H_y(x,y,z,t). \end{aligned} \tag{9}$$

Будем полагать, что в физической модели среда является изотропной и однородной (коэффициенты ε, μ, σ уравнений (7) — постоянны). В этом случае из уравнений Максвелла (7) при помощи операций $rot\,(rot\,\vec{E})$ и $rot\,(rot\,\vec{H})$:

$$rot\,(rot\,\vec{H}) = \varepsilon \cdot rot\,\vec{E}_t + \sigma \cdot rot\,\vec{E} + rot\,\vec{j},$$

$$rot\,(rot\,\vec{E}) = -\mu \cdot rot\,\vec{H}_t,$$

$$rot\,(rot\,\vec{H}) = \nabla\,(\,div\,\vec{H}\,) - \Delta\,\vec{H} = -\Delta\,\vec{H},$$

$$rot\,(rot\,\vec{E}) = \nabla\,(div\,\vec{E}) - \Delta\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 4\pi \cdot \nabla\,\rho - \Delta\,\vec{E},$$

можно получить для векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\vec{E}_{tt} - c^2\,\Delta\,\vec{E} = L_1\,(\vec{E}) + f, \tag{10}$$

$$\vec{H}_t - c^2\,\Delta\,\vec{H} = L_1(\vec{H}) + f_1,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\cdot\mu}},\, L_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t},\, f = -\frac{4\pi}{\varepsilon^2\mu}\cdot\nabla\,\rho - \frac{1}{\varepsilon}\vec{j}_t, \tag{11}$$

$$f_1 = \frac{1}{\varepsilon\cdot\mu}\,rot\,\vec{j},\, \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Студентам поясняется, что с учетом глубокого анализа физического смысла исследуемой прикладной задачи при формулировке обратных задач для системы уравнений Максвелла (7)–(9) возможны различные обратные задачи для дифференциальных уравнений разных типов.

Например, предположим, что у земной среды достаточно большая проводимость ($\sigma \neq 0$). Тогда известно (см., например, [13: с. 208]), что значение плотности тока проводимости намного превышает значение плотности тока смещения. В случае если не учитывать значение плотности тока смещения, то дифференциальные уравнения (10), (11) будут являться параболическими уравнениями. Теперь пусть значение плотности тока проводника в земной среде намного меньше, чем значение плотности тока смещения (см., например, [13: с. 208]). И если здесь совсем не учитывать значение тока проводимости ($\sigma = 0$), то дифференциальные уравнения (10), (11) будут являться гиперболическими уравнениями.

Проводя подобный анализ физических аспектов прикладных задач, исследуемых с помощью математических моделей обратных задач, студенты формируют фундаментальные знания как в области теории и методологии обратных задач для дифференциальных уравнений, так и в области математического моделирования процессов и явлений.

В заключение отметим, что современная педагогическая наука должна пополняться обоснованными подходами, практическое применение которых позволяло бы повысить качество и педагогическую эффективность обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений студентов высших учебных заведений физико-математических и естественнонаучных направлений подготовки.

Литература

1. *Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.Р.* Физические основы математического моделирования: учебное пособие. М.: Академия, 2005. 316 с.
2. *Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В.* Обратные и некорректные задачи: учебное пособие. Рн/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2011. 232 с.
3. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
4. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
5. *Корнилов В.С.* О междисциплинарном характере исследований причинно-следственных обратных задач // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2004. № 1 (2). С. 80–83.
6. *Корнилов В.С.* Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учебное пособие. М.: МГПУ, 2005. 359 с.
7. *Корнилов В.С.* Информационные технологии в гуманитарном анализе математических моделей обратных задач // Информационная образовательная среда. Теория и практика // Бюллетень Центра информатики и информационных технологий в образовании Института содержания и методов обучения Российской академии образования. Вып. 2. М.: ИСМО РАО, 2007. С. 48–52.
8. *Корнилов В.С.* Обучение студентов обратным задачам математической физики как фактор формирования фундаментальных знаний по интегральным уравнениям // Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации. Рецензируемый сборник научных трудов. Т. VI. Самара: Самарский филиал МГПУ, 2015. С. 251–257.
9. *Корнилов В.С.* Реализация научно-образовательного потенциала обучения студентов вузов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Казанский педагогический журнал. 2016. № 6. С. 55–59.
10. *Корнилов В.С.* Базовые понятия информатики в содержании обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2016. № 1. С. 70–84.
11. *Корнилов В.С.* Формирование фундаментальных знаний студентов в области методов математической физики при обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2016. № 2. С. 83–94.
12. *Корнилов В.С.* Теория и методика обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений: монография. М.: Изд-во «ОнтоПринт», 2017. 500 с.
13. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 367 с.
14. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. М.: УРСС, 2004. 191 с.
15. *Прилепко А.И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1992. С. 151–162.
16. *Романов В.Г.* Одномерная задача распространения электрических колебаний в проводах // Математические проблемы геофизики. Вып. 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1969. С. 92–102.
17. *Романов В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. 252 с.

18. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

19. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965. 333 с.

20. *Bidaibekov Y.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B., Akimzhan N.Sh.* Fundamentalization of knowledge system on applied mathematics in teaching students of inverse problems for differential equations // AIP Conference Proceedings 1676, 020044-1–020044-5 (Antalya, Turkey, November 5–7, 2015); doi: 10.1063/1.4930470. View online: URL: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930470.

21. *Bidaibekov E.Y., Kornilov V.S., Saparbekova G.A.* Implementation of Humanitarian Components of Applied Mathematics Teaching for University Students with a Specialization in Science // Indian Journal of Science and Technology. August 2016. Vol 9(29), DOI: 10.17485/ijst/2016/v9i29/88842

22. *Saparbekova G.A., Kornilov V.S., Berkimbaev K.M., Marasulov A.M., Akeshova M.M.* Formation of students' humanitarian culture in teaching applied mathematics // The Iceland Journal of Life Sciences. Jul 2014 of Jokull journal (ISSN: 0449-0576). Vol 64, № 7. P. 30–39.

Literatura

1. *Bordovskij G.A., Kondrat'ev A.S., Chouderi A.D.R.* Fizicheskie osnovy' matematicheskogo modelirovaniya: uchebnoe posobie. M.: Akademiya, 2005. 316 s.

2. *Vatul'yan A.O., Belyak O.A., Suxov D.Yu., Yavruyan O.V.* Obratny'e i nekorrektny'e zadachi: uchebnoe posobie. Rn/D: Izd-vo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2011. 232 s.

3. *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriyu obratny'x zadach. M.: Izd-vo MGU, 1994. 207 s.

4. *Kabanixin S.I.* Obratny'e i nekorrektny'e zadachi: uchebnik dlya studentov vuzov. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. 458 c.

5. *Kornilov V.S.* O mezhdisciplinarnom xaraktere issledovanij prichinno-sledstvenny'x obratny'x zadach // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2004. № 1 (2). S. 80–83.

6. *Kornilov V.S.* Nekotory'e obratny'e zadachi identifikacii parametrov matematicheskix modelej: uchebnoe posobie. M.: MGPU, 2005. 359 s.

7. *Kornilov V.S.* Informacionny'e texnologii v gumanitarnom analize matematicheskix modelej obratny'x zadach // Informacionnaya obrazovatel'naya sreda. Teoriya i praktika // Byulleten' Centra informatiki i informacionny'x texnologij v obrazovanii Instituta soderzhaniya i metodov obucheniya Rossijskoj akademii obrazovaniya. Vy'p. 2. M.: ISMO RAO, 2007. S. 48–52.

8. *Kornilov V.S.* Obuchenie studentov obratny'm zadacham matematicheskoj fiziki kak faktor formirovaniya fundamental'ny'x znanij po integral'ny'm uravneniyam // Byulleten' laboratorii matematicheskogo, estestvennonauchnogo obrazovaniya i informatizacii. Recenziruemy'j sbornik nauchny'x trudov. T. VI. Samara: Samarskij filial MGPU, 2015. S. 251–257.

9. *Kornilov V.S.* Realizaciya nauchno-obrazovatel'nogo potenciala obucheniya studentov vuzov obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Kazanskij pedagogicheskij zhurnal. 2016. № 6. S. 55–59.

10. *Kornilov V.S.* Bazovy'e ponyatiya informatiki v soderzhanii obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby' narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2016. № 1. S. 70–84.

11. *Kornilov V.S.* Formirovanie fundamental’ny’x znanij studentov v oblasti metodov matematicheskoj fiziki pri obuchenii obratny’m zadacham dlya differencial’ny’x uravnenij // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby’ narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2016. № 2. S. 83–94.

12. *Kornilov V.S.* Teoriya i metodika obucheniya obratnym zadacham dlya differencial’ny’x uravnenij: monografiya. M.: Izd-vo «OntoPrint», 2017. 500 s.

13. *Martinson L.K., Malov Yu.I.* Differencial’ny’e uravneniya matematicheskoj fiziki. M.: MGTU im. N.E’. Baumana, 1996. 367 s.

14. *My’shkis A.D.* E’lementy’ teorii matematicheskix modelej. M.: URSS, 2004. 191 s.

15. *Prilepko A.I.* Izbranny’e voprosy’ v obratny’x zadachax matematicheskoj fiziki // Uslovno-korrektny’e zadachi matematicheskoj fiziki i analiza. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1992. C. 151–162.

16. *Romanov V.G.* Odnomernaya zadacha rasprostraneniya e’lektricheskix kolebanij v provodax // Matematicheskie problemy’ geofiziki. Vy’p. 1. Novosibirsk: VCz SO AN SSSR, 1969. C. 92–102.

17. *Romanov V.G.* Obratny’e zadachi dlya differencial’ny’x uravnenij. Novosibirsk: NGU, 1973. 252 s.

18. *Romanov V.G.* Obratny’e zadachi matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1984. 264 s.

19. *Tumashev G.G., Nuzhin M.T.* Obratny’e kraevy’e zadachi i ix prilozheniya. Kazan’: Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1965. 333 s.

V.S. Kornilov

Formation of Fundamental Knowledge on Mathematical Modeling in Training Reverse Problems for Differential Equations

The article emphasizes the reader's attention to the fact that mastering the theory and methodology of studying inverse problems for differential equations, students get fundamental knowledge in the field of mathematical modeling of processes and phenomena. Methodological approaches that enable students not only to master mathematical methods for solving inverse problems, but also to acquire abilities and skills in constructing and analyzing mathematical models of inverse problems. For clarity, mathematical models of inverse problems are given.

Keywords: mathematical modeling; teaching inverse problems for differential equations; applied mathematics; student.