УДК 373.51; 162.1
DOI 10.25688/2072-9014.2020.54.4.02

О. М. Корчажкина

Вербально-визуальный метод при обучении булевой алгебре в курсе информатики для старшей школы

В статье излагается вербально-визуальный метод при обучении булевой алгебре в курсе информатики для старшей школы. Приведены примеры, иллюстрирующие интерпретацию знаков и выражений булевой алгебры в высказываниях (намерениях), когда истинность/ложность высказывания измеряется содержательной стороной и степенью понимания ее собеседником.

Ключевые слова: булева алгебра; диаграмма Эйлера – Венна; логическое высказывание; логическое мышление; обучение информатике; информационная культура школьника.

Символический метод вывода логических заключений, описанный британским математиком и логиком Джорджем Булем (1815–1864) в фундаментальном труде «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей» [1], послужил началом нового взгляда на чистую математику как на область знаний, лежащую в основе логики мышления. Согласно теории Дж. Буля, получившей название *алгебра логики,* или *булева алгебра,* и нацеленной на изучение операций над высказываниями на естественном языке с точки зрения их истинности и ложности, все высказывания могут быть переданы математическими символами, а операции над высказываниями — с помощью алгебраических формул. Причем доказательность истинности или ложности высказывания не носит субъективного характера, а может быть обоснована законами булевой алгебры и представлена в виде строгих математических выкладок.

Развитие логического мышления, в основе которого лежит умение строить взаимоувязанные и обоснованные высказывания согласно законам логики, является необходимым компонентом формирования информационной культуры современного школьника. При изучении предметов естественно-математического и гуманитарного цикла логика используется как инструмент, средство для решения учебных задач. Тогда как в курсе информатики и ИКТ логика выступает также и как цель обучения, которая достигается с помощью соответствующих разделов школьной программы «Элементы формальной логики» и «Элементы математической логики» (8 кл.), «Логические основы устройства ЭВМ» (9 кл.), «Булева алгебра» (10–11 кл.) [1].

Если рассматривать процесс понимания при усвоении знания в его классической интерпретации, то есть как обратимый перевод абстрактно-логических форм информации в ее наглядно-образные формы, то знакомство учащихся 10–11-х классов с математическими инструментами булевой алгебры при анализе логических отношений целесообразно производить путем привлечения материала, который был ими освоен на средней ступени в курсе математики и информатики, а именно естественного языка (в виде развернутых высказываний) и теории множеств (в виде диаграмм Эйлера – Венна). Сочетание этих двух взаимосвязанных способов анализа логических рассуждений может явиться дополнительным стимулом к «очеловечиванию» выражений в терминах булевой алгебры и источником многочисленных учебных ситуаций, которые учитель может предложить учащимся для обсуждения.

Рабочий аппарат алгебры логики достаточно гибок, что позволяет применять его не только для проверки истинности или ложности единичного высказывания — традиционного материала булевой алгебры, но и для проверки **истинности или ложности единого речевого акта,** когда имеются оба субъекта, участвующие в акте коммуникации, — сам говорящий и человек, которому адресовано высказывание, т. е. слушающий. Причем если высказывание принимает форму интенции (намерения, желания, предпочтения), то такое высказывание считается истинным, если оно правильно распознано (прочтено) собеседником.

Проиллюстрируем на простых моделях, как можно наглядно и жизненно интерпретировать основные знаки булевой алгебры $\setminus$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и Δ, устанавливающие логические отношения между высказываниями в ситуации, когда вы пригласили в гости своего друга и предлагаете ему на выбор три напитка: черный кофе, молоко или кофе с молоком[1]. В ответ ваш друг высказывает желание выбрать один из трех напитков (черный кофе, молоко, кофе с молоком), любые два напитка, все три напитка или выражает намерение вообще отказаться от угощения. Для решения задачи примем следующие обозначения: пусть высказывание Ф (греческая буква «фи») выражает желание или намерение друга выпить кофе (*Я хотел бы выпить кофе*); а высказывание Х (греческая буква «хи») — его желание или намерение выпить молоко (*Я хотел бы выпить молока*)[2].

Покажем связь этих знаков с синтаксическим значением высказываний на естественном языке:

- $\setminus$ — знак строгой логической дизъюнкции, **логической операции вычитания одного из другого,** по смыслу максимально приближенной

[1] В примерах ниже будут иллюстрироваться различные ситуации, при которых ваш друг выбирает *кофе* и *молоко* в виде одного напитка «кофе с молоком», и *кофе* и *молоко* как два разных напитка, которые он может попеременно пить из разных чашек.

[2] Множества Ф и Х на рисунках ниже представлены в виде окружностей внутри универсального множества U, обозначенного прямоугольником.

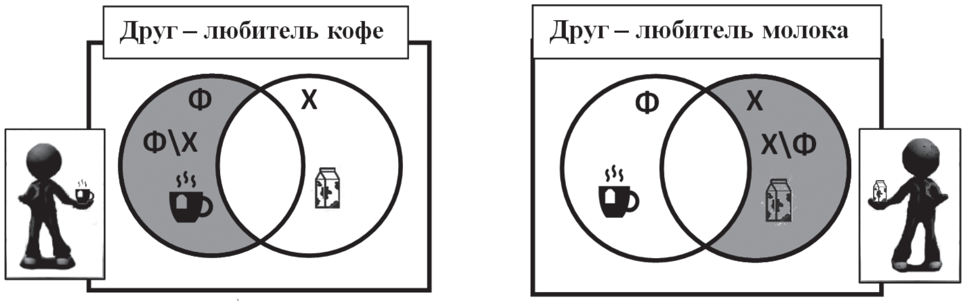
к предлогу *«без»* (одно без другого); соединяет сущности, находящиеся в отношениях синтаксического *взаимоисключения*;

- $\wedge$ — знак конъюнкции (пересечения), **логической операции умножения одного на другое,** по смыслу максимально приближенной к сложному союзу *«и ..., и ...»* (и одно, и другое вместе); соединяет сущности, находящиеся в отношениях синтаксической *равнозначности, равноправности*;
- $\vee$ — знак дизъюнкции, или нестрогой логической дизъюнкции (объединения), **логической операции сложения одного и другого,** по смыслу максимально приближенной к сложному союзу *«или ... , или ..., или оба»* (или одно, или другое, или оба вместе); соединяет сущности, находящиеся в отношениях синтаксического *объединения*;
- $\neg$ — знак инверсии, или **логической операции отрицания,** по смыслу максимально приближенного к частице *«не»*, предлогу *«кроме»* (все, кроме …); позиционирует сущности, находящиеся в отношениях синтаксического *противопоставления*;
- Δ — знак симметрического вычитания, **логической операции вычитания умноженного одного на другое без их объединения;** по смыслу она максимально приближена к сложному союзу *«или ... , или ..., без обоих вместе»* (или одно, или другое, но не оба вместе); соединяет сущности, находящиеся в отношениях синтаксической *альтернативы*.

Исходя из значения истинности высказываний, в которых могут использоваться знаки \ , $\wedge$, $\vee$, $\neg$ и Δ, а также в соответствии с аксиоматикой булевой алгебры возможны семь вариантов развития ситуации (в скобках даны ссылки на соответствующие рисунки с диаграммами Эйлера – Венна):

Друг — любитель кофе предпочитает пить только кофе (рис. 1 *а*). Намерение, выступающее как Ф \ Х, означает **выбор строго условия Ф.** Друг — любитель кофе ответит: *Я хотел бы выпить кофе* ***без*** *Я хотел бы выпить молока = = Я хотел бы выпить только кофе (черный кофе).*

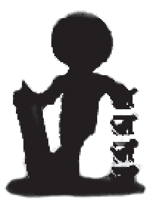
Друг — любитель молока предпочитает пить только молоко (рис. 1 *б*). Намерение, выступающее как Х \ Ф, означает **выбор строго условия Х.** Друг — любитель молока ответит: *Я хотел бы выпить молока* ***без*** *Я хотел бы выпить кофе = = Я хотел бы выпить только молоко.*



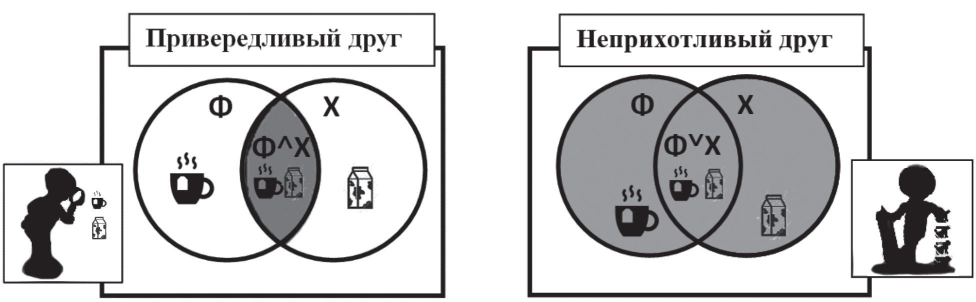
а *б*

Рис. 1. Выражение операций вычитания Ф \ Х (*а*) и Х \ Ф (*б*) через множества Ф и Х

Привередливый друг предпочитает пить кофе только с молоком (рис. 2 *а*). Намерение, выступающее как Ф ∧ Х, означает **выбор обоих условий одновременно:** *Я хотел бы выпить кофе* ***и*** *Я хотел бы выпить молока = Я хотел бы выпить кофе с молоком.*



Неприхотливый друг предпочитает оба напитка или их комбинацию (рис. 2 *б*). Намерение, выступающее как Ф ∨ Х, означает **выбор хотя бы одного из трех условий:** *Я хотел бы выпить кофе* ***или*** *Я хотел бы выпить молока* ***или*** *Я хотел бы выпить кофе с молоком. Неприхотливый друг ответит: Можно кофе с молоком, а можно кофе и молоко по отдельности.*



а *б*

Рис. 2. Выражение операций конъюнкции (*а*) и дизъюнкции (*б*) через множества Ф и Х

Друг — противник кофе предпочитает любые напитки, кроме кофе (рис. 3 *а*). Намерение, выступающее как ¬ Ф, означает **неприятие условия:** *Я хотел бы выпить кофе.* Друг — противник кофе — ответит: *Я хотел бы выпить любой напиток, только не кофе.*

Друг — противник молока предпочитает любые напитки, кроме молока (рис. 3 *б*). Намерение, выступающее как ¬ Х, означает **неприятие условия:** *Я хотел бы выпить молока.* Друг — противник молока ответит: *Я хотел бы выпить любой напиток, только не молоко.*

Друг — гурман не любит пить кофе с молоком, хотя любит и кофе, и молоко по отдельности (рис. 3 *в*). Намерение, выступающее как Ф Δ Х, означает **выбор строго одного из двух условий:** *Я хотел бы выпить кофе* ***или*** *Я хотел бы выпить молока.*

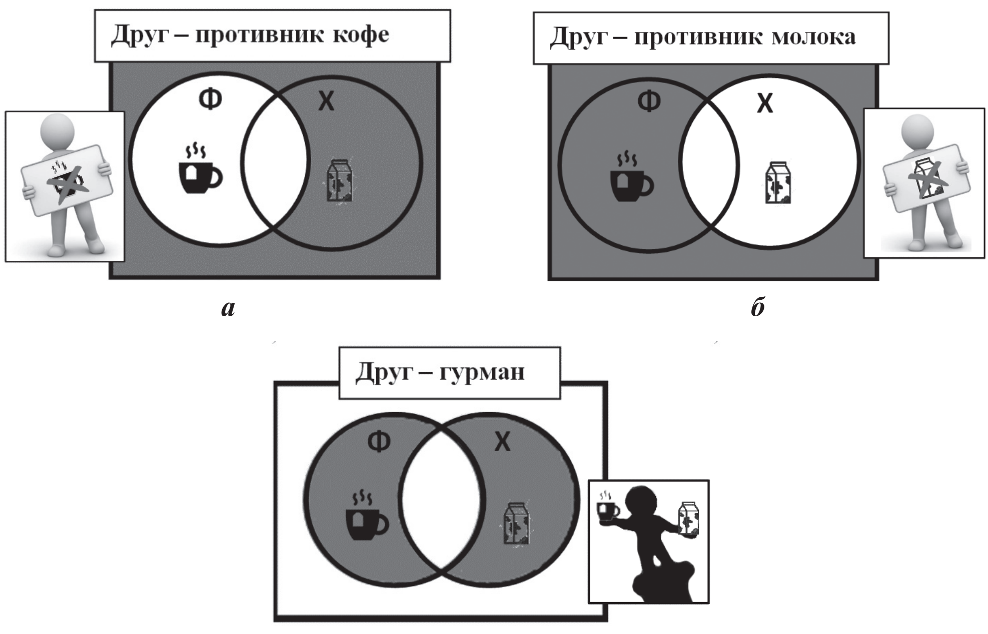


Рис. 3. Выражение операции дополнения (отрицания) (*а, б*) и симметрической разности (*в*) через множества Ф и Х

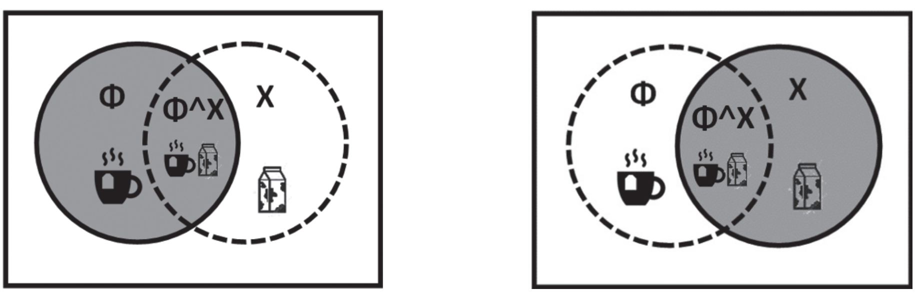
Приведенные простейшие логические отношения для иллюстрации истинности/ложности высказываний о намерении могут явиться моделью, по которой учащиеся подобным же образом могут интерпретировать любые другие актуальные для них вербальные ситуации на основе аксиом булевой алгебры. Подобным же образом — в рамках ситуации угощения друга кофе с молоком — могут быть интерпретированы приведенные ниже основные законы булевой алгебры.

1. Закон коммуникативности конъюнкции (переместительный): $Ф \wedge Х = Х \wedge Ф$ означает, что ситуация *Я хотел бы выпить кофе* ***и*** *Я хотел бы выпить молока* равнозначна ситуации *Я хотел бы выпить кофе с молоком* (рис. 2 *а*).

2. Закон коммуникативности дизъюнкции (переместительный): $Ф \vee Х = Х \vee Ф$ означает, что ситуация *Я хотел бы выпить кофе* ***или*** *Я хотел бы выпить молока* равнозначна ситуации: *Мне подошел бы любой из трех напитков в любом сочетании* (рис. 2 *б*).

3. Первый закон поглощения: при конъюнкции Ф и Х и дизъюнкции с Ф получаем Ф: $Ф \vee (Ф \wedge Х) = Ф$. То есть выражение *Я хотел бы выпить черный кофе* ***или*** *(Я хотел бы выпить черный кофе* ***и*** *Я хотел бы выпить молока)* означает, что *И черный кофе, и кофе с молоком для меня приемлемы* (рис. 4 *а*).

4. Второй закон поглощения: при дизъюнкции Ф и Х и конъюнкции с Х получаем Х: $Х \wedge (Ф \vee Х) = Х$. То есть выражение *Я хотел бы выпить молока* ***и*** *(Я хотел бы выпить кофе* ***или*** *Я хотел бы выпить молока)* означает, что *И кофе с молоком, и одно молоко для меня приемлемы* (рис. 4 *б*).



а ***б***

Рис. 4. Иллюстрация первого (*а*) и второго (*б*) законов поглощения через множества Ф и Х

5. Первый закон де Моргана (общей инверсии): отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний: ¬ (Ф ∧ Х) = ¬ Ф ∨ ¬ Х. Высказывание Неверно, что *Я хотел бы выпить кофе* **и** *Я хотел бы выпить молока означает, что Я не хочу пить ни кофе, ни молоко, ни кофе с молоком* (рис. 5 *а*).

6. Второй закон де Моргана (общей инверсии): отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний: ¬ (Ф ∨ Х) = ¬ Ф ∧ ¬ Х. Высказывание Неверно, что *Я хотел бы выпить кофе* **или** *Я хотел бы выпить молока означает, что Я не хочу пить кофе с молоком* (рис. 5 *б*).

7. Закон идемпотентности дизъюнкции: Ф ∨ Ф = Ф. Высказывание *Я хотел бы выпить кофе* **и** *Я хотел бы выпить кофе* означает, что *Я хотел бы выпить кофе* (рис. 5 *в*).

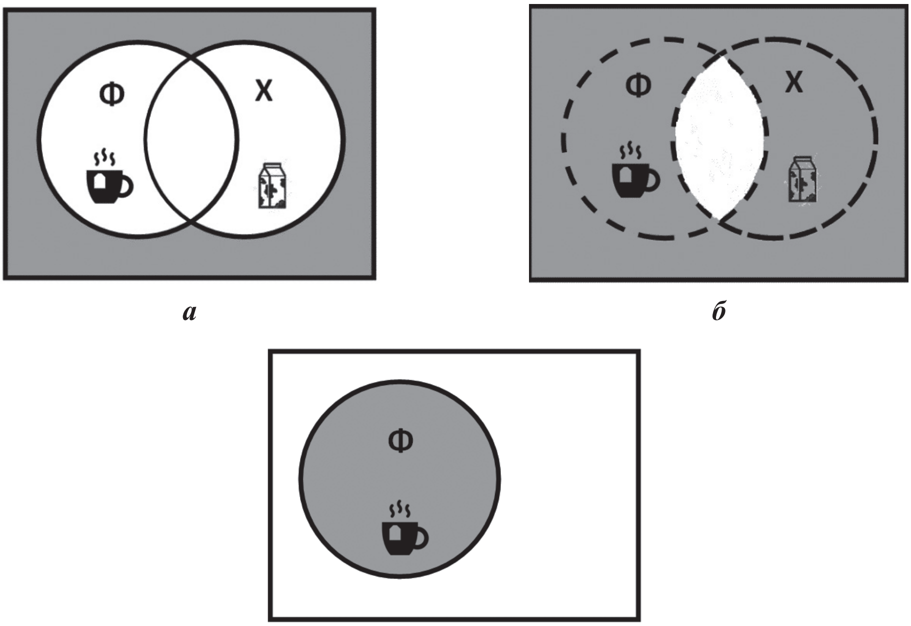


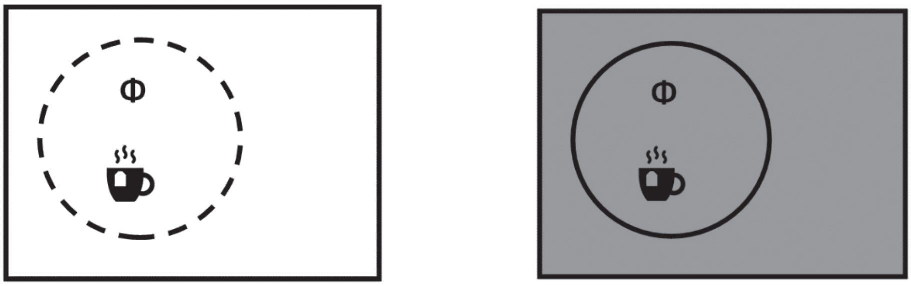
Рис. 5. Иллюстрация первого (*а*) и второго (*б*) законов де Моргана через множества Ф, Х и законов идемпотентности конъюнкции и снятия двойного отрицания (*в*)

8. Закон идемпотентности конъюнкции: Ф ∧ Ф = Ф. Высказывание *Я хотел бы выпить кофе* **или** *Я хотел бы выпить кофе означает, что Я хотел бы выпить кофе* (рис. 5 *в*).

9. Закон снятия двойного отрицания: ¬ ¬ Ф = Ф. Высказывание Неверно, что Я не хочу пить кофе означает, что Я хотел бы выпить кофе (рис. 5 *в*).

10. Первый закон отрицания (дополнения): Ф ∧ ¬ Ф = 0. Высказывание *Я хотел бы выпить кофе* **и** *Я хотел бы выпить любой напиток, кроме кофе* является ложным (высказывание непонятно, поскольку такая ситуация невозможна ни при каких обстоятельствах) (рис. 6 *а*).

11. Второй закон отрицания (дополнения): $\Phi \vee \neg \Phi = 1$. Выражение *Я хотел бы выпить кофе* **или** *Я хотел бы выпить любой напиток, кроме кофе* является истинным (высказывание понятно, поскольку такая ситуация возможна при любых обстоятельствах) (рис. 6 *б*).



а *б*

Рис. 6. Иллюстрация первого (*а*) и второго (*б*) законов отрицания через множества Ф

12. Первый закон склеивания (исключения): $(\Phi \wedge X) \vee (\Phi \wedge\ ) = \Phi$. Высказывание *Я хотел бы выпить кофе с молоком* **или** *Я хотел бы выпить черный кофе* означает *Я хотел бы выпить черный кофе* (рис. 7).

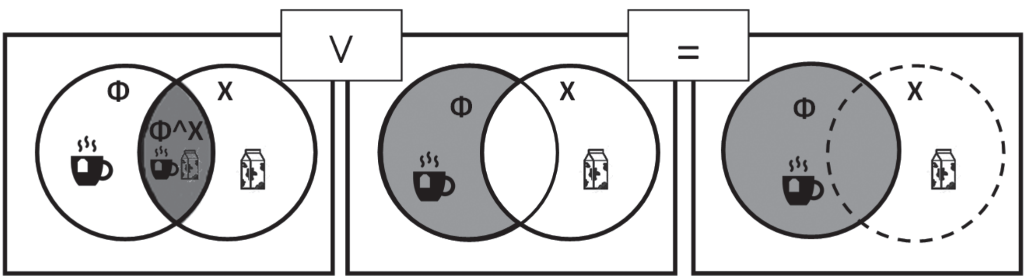


Рис. 7. Иллюстрация первого закона склеивания через множества Ф и Х

13. Второй закон склеивания (исключения): $(\Phi \vee X) \wedge (\Phi \vee\ ) = \Phi$. Высказывание *Я хотел бы выпить любой напиток — кофе с молоком, черный кофе, одно молоко* **и** *Я хотел бы выпить кофе, но не хочу пить молоко* означает *Я хотел бы выпить черный кофе* (рис. 8).

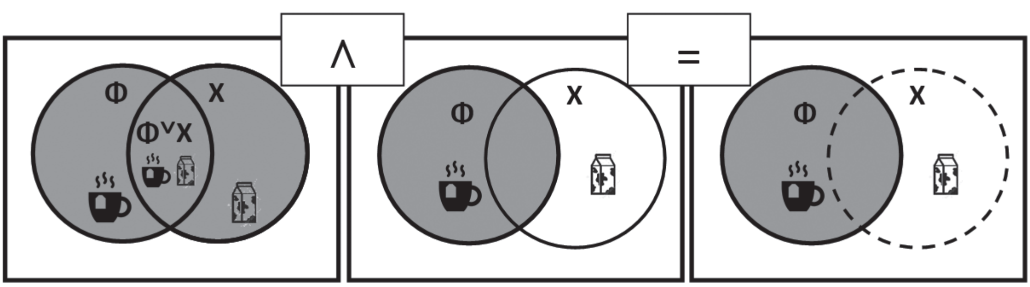


Рис. 8. Иллюстрация второго закона склеивания через множества Ф и Х

Для иллюстрации трехкомпонентных, то есть более сложных, законов булевой алгебры — сочетательного и распределительного — к прежним высказываниям Φ и X приобщим еще одно, которое обозначим греческой буквой ϒ (ипсилон): *Я хотел бы съесть мороженое.*

14. Закон ассоциативности дизъюнкции (сочетательный): Φ ∨ (X ∨ ϒ) = = (Φ ∨ X) ∨ ϒ означает: *Я хотел бы выпить кофе, молоко* ***и*** *съесть мороженое* — в любом сочетании: *черный кофе, молоко, мороженое, кофе с молоком, кофе-глясе (черный кофе с мороженым), молочный коктейль (молоко с мороженым), кофе с молоком и мороженым* (рис. 9).

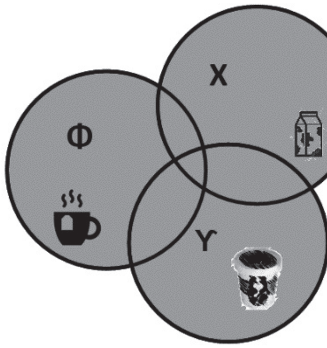
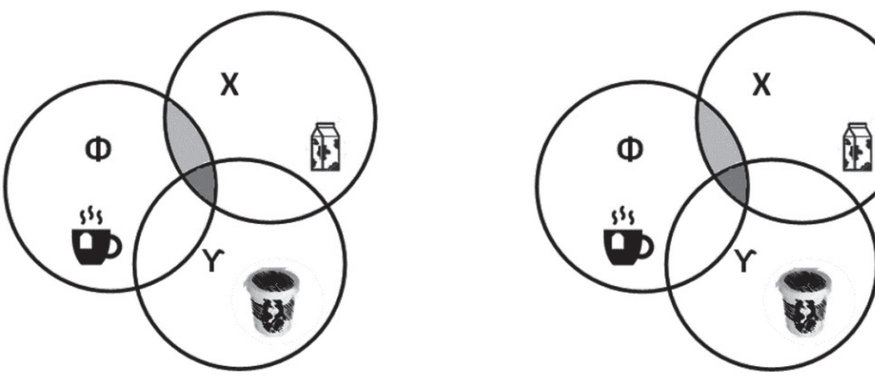


Рис. 9. Иллюстрация закона ассоциативности дизъюнкции через множества Φ, X и ϒ

15. Закон ассоциативности конъюнкции (сочетательный): Φ ∧ (X ∧ ϒ) = = (Φ ∧ X) ∧ ϒ означает: *Я хотел бы выпить кофе с молоком и мороженым* (самая темная область на рис. 10).

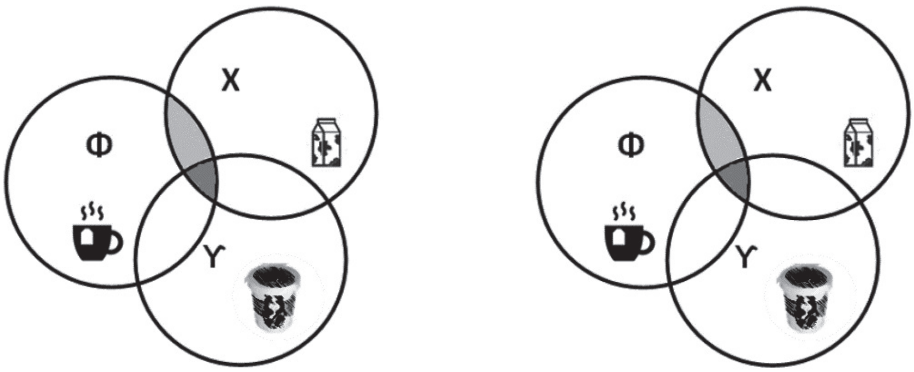


а) Φ ∧ (X ∧ ϒ) ***б)*** (Φ ∧ X) ∧ ϒ

Рис. 10. Иллюстрация закона ассоциативности конъюнкции через множества Φ, X и ϒ

16. Закон дистрибутивности дизъюнкции относительности конъюнкции (распределительный): Φ ∨ (X ∧ ϒ) = (Φ ∨ X) ∧ (Φ ∨ ϒ) означает, что возможны

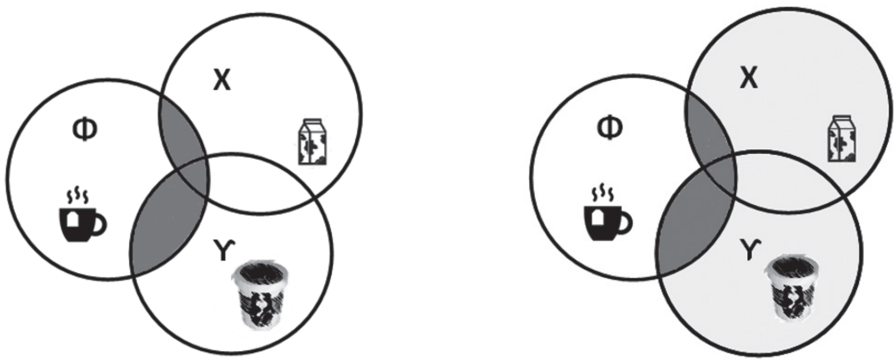
пять вариантов: 1) *Я хотел бы выпить черный кофе;* 2) *Я хотел бы выпить кофе с молоком;* 3) *Я хотел бы выпить молочный коктейль;* 4) *Я хотел бы выпить кофе-глясе;* 5) *Я хотел бы выпить кофе с молоком и с мороженым* (рис. 11 *а, б*).



а) $\Phi \vee (X \wedge \Upsilon)$ ***б)*** $(\Phi \vee X) \wedge (\Phi \vee \Upsilon)$

Рис. 11. Иллюстрация закона дистрибутивности дизъюнкции относительности конъюнкции через множества Ф, Х и ϒ

17. Закон дистрибутивности конъюнкции относительности дизъюнкции (распределительный): $\Phi \wedge (X \vee \Upsilon) = (\Phi \wedge X) \vee (\Phi \wedge \Upsilon)$ означает, что возможны три варианта: 1) *Я хотел бы выпить кофе с молоком;* 2) *Я хотел бы выпить кофе-глясе;* 3) *Я хотел бы выпить кофе с молоком и с мороженым* (рис. 12 *а, б*).



а) $\Phi \wedge (X \vee \Upsilon)$ ***б)*** $(\Phi \wedge X) \vee (\Phi \wedge \Upsilon)$

Рис. 12. Иллюстрация закона дистрибутивности конъюнкции относительности дизъюнкции через множества Ф, Х и ϒ

В заключение отметим, что обращение к естественно-языковым основам булевой алгебры на этапе изучения логических операций, аксиом и законов, положенных в ее основу, а также использование изобразительной наглядности в виде диаграмм Эйлера – Венна позволяет учащимся глубже осознать строение сложных логических высказываний и соотнести способы установления их истинности / ложности с помощью алгебраических и лингвистических методов применительно к учебным ситуациям, реальным ситуациям общения.

Литература

1. Сергеев А. В. Преподавание основ логики в курсе информатики основной школы // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок»: сайт. URL: https://urok.1sept.ru/articles/211504 (дата обращения: 15.03.2020).

2. Boole G. An investigation of the Laws of Thought on which are pounded // The Mathematical theories of logic and probabilities. London: Walter and Maberly, Cambridge: MacMillan and Co, 1854. 424 p.

Literatura

1. Sergeev A. V. Prepodavanie osnov logiki v kurse informatiki osnovnoj shkoly` // Festifal` pedagogicheskix idej «Otkry`ty`j urok»: sajt. URL: https://urok.1sept.ru/articles/211504 (data obrashcheniya: 15.03.2020).

2. Boole G. An investigation of the Laws of Thought on which are pounded // The Mathematical theories of logic and probabilities. London: Walter and Maberly, Cambridge: MacMillan and Co, 1854. 424 p.

O. M. Korchazhkina

The Verbal and Visual Method when Teaching Boolean Algebra within Advanced Computer Science Course in Secondary School

The article describes a verbal and visual method for teaching Boolean algebra in a computer science course for high school. Examples are given that illustrate the interpretation of Boolean algebra signs and expressions in statements of intent, when the truth/falsity of a statement is measured by the content side and the degree of understanding of it by the interlocutor.

Keywords: Boolean algebra; Euler – Venn diagram; logical utterance; logical thinking; computer science training; student’s information culture.