УДК 373+51.7+004

Е.Ы. Бидайбеков,
Г.Б. Камалова,
Б.Г. Бостанов

Развитие алгоритмической культуры школьников на основе геометрии и алгоритмов Аль-Фараби

В статье обращается внимание на роль идей и методов геометрических построений и вычислительных алгоритмов Аль-Фараби в развитии алгоритмической культуры школьников. Излагаются вычислительные алгоритмы геометрических построений Аль-Фараби, следуя исследованиям А. Кубесова. Выявляются возможности использования в современном математическом образовании алгоритмического подхода при обучении решению математических задач.

Ключевые слова: алгоритмическая культура, геометрическое наследие Аль-Фараби; вычислительные алгоритмы; геометрическое построение с помощью циркуля и линейки; школьник.

Аль-Фараби (870–950 гг.) — один из величайших ученых, мыслителей и энциклопедистов раннего Средневековья, уроженец Казахстана и представитель древних тюркских племен, на основе которых был образован нынешний казахский народ. Как обладателю незаурядных способностей во всех отраслях знаний, ему принадлежит почетное место среди огромной плеяды ученых средневекового Востока, которые еще при жизни называли его вторым учителем — «ал-муаллим ас-сани» — после Аристотеля.

Аль-Фараби является одним из основоположников прогрессивной общественно-философской мысли на мусульманском Востоке, в том числе в Средней Азии и Казахстане, откуда вышли такие философы и ученые, как Ибн-Сина, Аль-Бируни, Омар Хайям, Наср ад-Дин ат-Туси и др. Аль-Фараби написал кроме чисто философских и логических сочинений множество естественно-математических и натурфилософских работ. Он оставил богатейшее научное наследие, которое оказало огромное влияние на последующее развитие науки как на Востоке, так и на Западе. Изучение научного наследия этого мыслителя, определение его влияния на мировую науку и цивилизацию было и остается актуальным и сегодня.

В научной деятельности Аль-Фараби и физико-математические дисциплины также занимают большое место. Математическое наследие Аль-Фараби достаточно хорошо изучено Ауданбеком Кубесовым (1932–2008 гг.) — известным ученым в области истории математической науки и педагогики исламского Востока. Его труды «Математическое наследие Аль-Фараби», «Математические трактаты» оцифрованы в Мичиганском университете (2007, 2010), а «Комментарии к “Альмагесту”» Птолемея» — в Калифорнийском университете (2008) [5–6].

В исследованиях А. Кубесова приведены основные сведения о рукописях, изданиях, переводах и исследованиях сочинений Аль-Фараби, содержащих физико-математические сведения. Некоторые другие сведения о зарубежных изданиях, переводах и исследованиях этих сочинений можно найти в библиографической книге Н. Решера [7]. Широко известна монография А. Кубесова «Математическое наследие Аль-Фараби» [3], получившая высокую оценку зарубежных ученых [6]. В книге «Математическое наследие Аль-Фараби» на основе опубликованных и неопубликованных рукописей ученого освещены математика в классификации Аль-Фараби, геометрия, тригонометрия, арифметика, алгебра Аль-Фараби и их применение в астрономии, учение о вероятностях и математической теории музыки и др., краткий обзор которых приведен в статье [6]. А. Кубесовым был обнаружен до него не известный геометрический трактат Аль-Фараби, который называется «Книга духовных искусных приемов и природных тайн о тонкостях геометрических фигур».

Этот труд Аль-Фараби, целиком посвященный геометрическим построениям, важным в землемерии, архитектуре, техники и геодезии, состоит из Введения и 10 книг (макалат); он был создан, как видно из названия «духовные искусные приемы», для приложения геометрии к различным вопросам практики и других наук.

Использование в процессе обучения школьников математике и информатике идей и методов геометрических построений и вычислительных алгоритмов Аль-Фараби позволяет сформировать их мотивацию к обучению, интерес к историческим аспектам развития математической науки, развить их алгоритмическую культуру и другие творческие способности.

Аль-Фараби в данном трактате уделил основное внимание алгоритмам геометрических построений, что соответствует общей характеристике математики средневекового Востока, которая в основном была прикладно-вычислительной. Как известно, алгоритмы геометрических построений как алгоритмы для решения геометрических задач изучаются в вычислительной геометрии, которая является разделом современной информатики. Так что есть основание считать, что в трактате средневекового ученого рассматриваются начала современной вычислительной геометрии. Впрочем, Аль-Фараби все построения приводит без доказательств.

В первой книге рассматриваются элементарные построения с помощью циркуля и линейки. Вторая книга трактата посвящена правильным многоугольникам, строящимся на данном отрезке, а третья книга — правильным многоугольникам, вписанным в круг. В четвертой книге решаются задачи проведение круга, описанного около треугольника, и правильных многоугольников, а в пятой книге — проведение круга, вписанного в треугольник. Шестая книга посвящена построению правильных многоугольников, вписанных друг в друга. Построение треугольников в некоторых задачах основано на применении метода гомотетии. В седьмой книге рассматриваются задачи разделения треугольника на равные части, увеличения и уменьшения его в несколько раз; применяется метод гомотетии. Восьмая книга посвящена разделению параллелограммов и трапеций прямыми, удовлетворяющими различным условиям. Здесь также применяется метод гомотетии. В девятой книге решен ряд задач на преобразование квадрата из n^2 квадратов, построение квадрата из 2 n^2 и $n^2 + m^2$ квадратов и обратные задачи, рассматриваются различные способы построения квадрата из трех равных квадратов. В этой же книге приводится критика Аль-Фараби решения ремесленниками задачи утроения квадратов. Десятая книга посвящена различным построениям на сфере, в том числе разделению сферы на правильные сферические многоугольники, равносильные построению вписанных правильных многогранников, вершинами которых являются вершины многоугольников.

Геометрический трактат Аль-Фараби сыграл большую роль в развитии конструктивной геометрии. Многие идеи, высказанные в этом труде, были развиты в дальнейшем в трудах математиков как средневекового Востока, так и Европы эпохи Возрождения. Что касается геометрических задач на построение, то они, составляя одну из содержательных линий школьного курса геометрии, и сегодня являются весьма существенным элементом в обучении геометрии, неотъемлемой ее частью.

Также в трактатах Аль-Фараби предлагаются уникальные алгоритмы огромного количества геометрических задач на построение с помощью циркуля и линейки даже для случаев, в которых точное построение сделать просто невозможно. Для них приводится алгоритм, позволяющий осуществить построение только лишь приближенно, что и являются особенностью подхода Аль-Фараби. Особый интерес здесь вызывают классические задачи древности, неразрешимые точно с помощью циркуля и линейки: о трисекции угла, построении правильных многоугольников, вписанных в круг, и др. Правильные многоугольники всегда привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других специалистов.

Очевидно, что освоение идей построения приближенных алгоритмов решения геометрических задач позволяет школьникам осознать роль приближенных методов решения математических задач вообще.

В качестве примера укажем пути эффективного использования упомянутых здесь геометрических построений из математических трактатов Аль-Фараби [1], а именно построения геометрических правильных многоугольников (рассматривается как сторона многоугольника для всех n — от 3 до 10), строящихся на данном отрезке. Эта задача интересна при изучении математики и информатики, и этому ее применению способствует уникальность исследования Аль-Фараби, которая заключается в использовании алгоритмического подхода при решении математических проблем, и прикладная направленность проведения исследований.

Эти алгоритмические подходы и прикладная направленность проведения исследований позволяют построить дидактические средства электронного обучения, так как в основе информатики и информатизации, а также в основе использования ИКТ лежит понятие *алгоритм*. А если говорить о прикладной направленности, то одним из главных принципов Аль-Фараби является изучение и рассмотрение математики с точки зрения естественных явлений и процессов и ее всевозможных практических применений. В этом плане особенно ценно рассмотрение «искусных приемов» (как прототипа современной прикладной математики) как одного из разделов математики. Реализация в процессе обучения этого принципа Аль-Фараби позволяет сформировать у школьников мотивацию к изучению прикладных задач.

В процессе обучения построению геометрических фигур важно донести до сведения школьников идеи подходов и методов таких построений, принадлежащих разным ученым. Такой подход позволяет не только реализовать историческую компоненту обучения, но и привить школьникам мотивацию к логическому анализу идей и методов геометрических построений.

В качестве примера рассмотрим правильный семиугольник. Его стороны не могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Доказательство этого утверждения приведено, например, в книге «Что такое математика?» [4: с. 165] Заметим, что большой вклад в решение задач построения подобных правильных многоугольников внес немецкий математик Гаусс (1777–1855). Он указал все значения *n*, при которых возможно построение правильного *n*-угольника только с помощью циркуля и линейки. Этими многоугольниками оказались лишь многоугольники, у которых количество сторон является простым числом вида $2^{2^k}+1$, а также те, которые получаются из них удвоением числа сторон.

С помощью циркуля и линейки оказалось невозможным построение правильного 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 28….- угольников и т. д.

Как известно, Евклид не рассматривал построение правильных многоугольников (при *n* = 7, 9, 11, 13, 14), не осуществимое только циркулем и линейкой. А Аль-Фараби предлагает алгоритмы построения таких многоугольников (в случае Аль-Фараби *n* = 7,9) приближенно с некоторой точностью, хотя Аль-Фараби не отмечает приближенного характера своих построений. Приближенность этих алгоритмов показана при исследовании математической обоснованности их, а для остальных *n* предложенные Аль-Фараби алгоритмы построения многоугольников точны и не вызывают затруднений.

Ученый пишет: «Если он сказал: как построить на линии *AB* равносторонний семиугольник, то сделаем линию *BC,* равной линии *AB,* построим на линии *AC* равносторонний треугольник *DAC* и опишем около треугольника *ADC* круг. Проведем в нем хорду — линию *AE,* равную линии *AB,* и разделим *AE* пополам в точке *G,* восставим перпендикуляр *GH* и продолжим его до окружности круга (см. рис. 1).

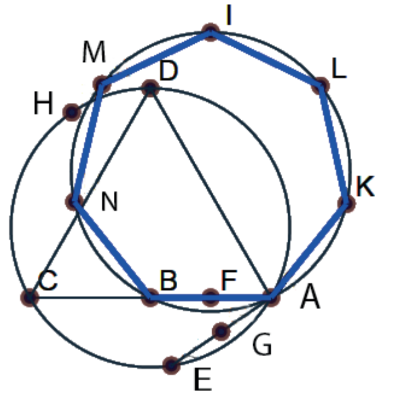

Рис. 1. Построение семиугольника

Разделим *AB* пополам в точке *F,* восставим к ней перпендикуляр *FI,* равный перпендикуляру *GH*. Проведем через точки *A, B* и *I* круг *ABI* и отложим на нем дуги *AK, KL, LI, IM, MN* и *NB,* равные дуге *AB*. Проведем линии *AK, KL, LI, IM, MN* и *NB*; это — равносторонний и равноугольный семиугольник» [1: с. 110–111].

Значение стороны правильного семиугольника с точностью до тысячных равно $2 \cdot R \cdot \sin (360° / 14) \approx 2 \cdot R \cdot \sin 25° 43' \approx R \cdot 0{,}868$. По алгоритму построения Аль-Фараби стороны правильного семиугольника с точностью до тысячных равны $(R \cdot \sqrt{3}) / 2 \approx R \cdot 0{,}866$. Эта точность не улучшаема. Правда, здесь Аль-Фараби не отмечает приближенного характера своего построения, но он говорит об этом в другом месте, когда рассматривает аналогичное построение семиугольника, вписанного в круг [1: с. 126]. Позднее математики эту задачу свели к неприводимому уравнению третьей степени.

К категории таких задач, не разрешимых с помощью циркуля и линейки, относится и задача построения правильного девятиугольника. В основе алгоритма построения правильного вписанного девятиугольника, как видно из приведенного ниже текста, лежит и задача о делении угла на три равные части.

Задача о трисекции угла, за исключением случая трисекции прямого угла, не может быть решена точно с помощью циркуля и линейки, она сводится к кубическому уравнению $\sin (\beta) = 3 \cdot x - 4 \cdot x^3$, $\sin (\beta / 3) = x$, где β рассматриваемый угол. В книге «Что такое математика?» [4: с. 164] показано, что трисекция угла с помощью только циркуля и линейки в общем случае невозможна.

Аль-Фараби в своей работе приводит два способа ее решения. Они носят приближенный характер. Алгоритмы построения трисекции угла в трактате описаны следующим образом:

«Если он сказал: как разделить угол *ABC* на три равные части, то если угол прямой, построим на линии *BC* равносторонний треугольник *DBC*. Тогда угол *ABD* — треть прямого угла. Разделим угол *DBC* пополам. Вот рисунок этого (рис. 2)».

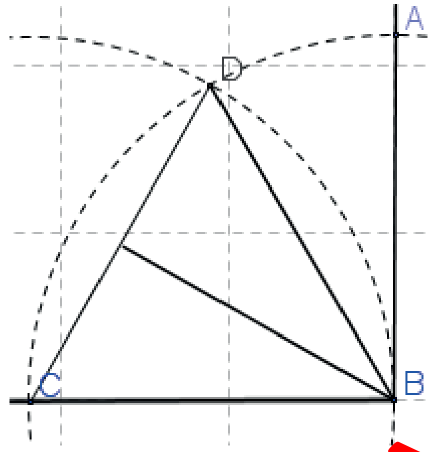

Рис. 2. Построение трисекции прямого угла

Если угол меньше прямого угла, то «построим острый угол — угол *ABC* и, если мы хотим разделить его на три равные части, опустим из точки *A* перпендикуляр *AH* на линию *BC* и проведем из точки *A* линию *AD* параллельно *BC*. Приложим линейку к точке *B* и будем двигать ее по линиям *AD* и *AH* до тех пор, пока линия, которая находится между линиями *AD* и *AH*, не станет равной удвоенной линии *AB*. Это, например, линия DEB, так что линия *DE* — удвоенная линия *AB*. Тогда угол *DBC* — треть угла *ABC*. Вот рисунок этого (рис. 3)».

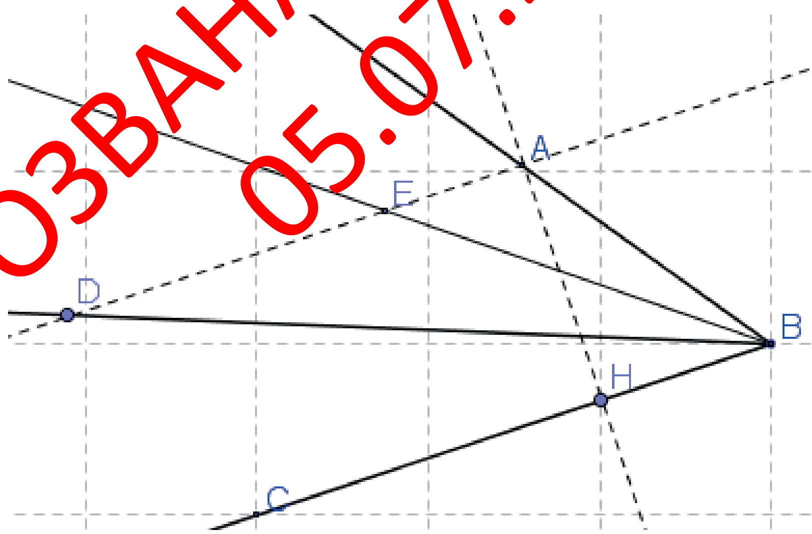

Рис. 3. Построение трисекции острого угла

Эти построения, впрочем, как и все другие, у Аль-Фараби приведены без доказательства. Построение девятиугольника Аль-Фараби основано на трисекции, и описание его имеет вид: «Если он сказал: как построить на линии *AB* равносторонний и равноугольный девятиугольник, то опишем круг *CDE* произвольного размера с центром в точке *G,* отметим на нем точку *C,* примем ее за центр и на расстоянии полудиаметра круга отметим точки *E* и *D.* Разделим дугу *DE* на три равные части (рис. 4). Пусть одна такая дуга — *EH.* Проведем линии *EG, EH* и *HG.* Проведем между линиями *EG* и *HG* линию *FI,* равную линии *AB* и параллельную линии *EH.* Примем точки A и B за центры и на расстоянии *FG* опишем круги, которые пересекутся в точке *K.* Примем точку *K* за центр и на расстоянии *KA* опишем круг *ABL.* Разделим дугу *ALB* на восемь равных частей и соединим эти точки деления хордами. Получится равносторонний и равноугольный девятиугольник на линии *AB»* [1: с. 113–114].

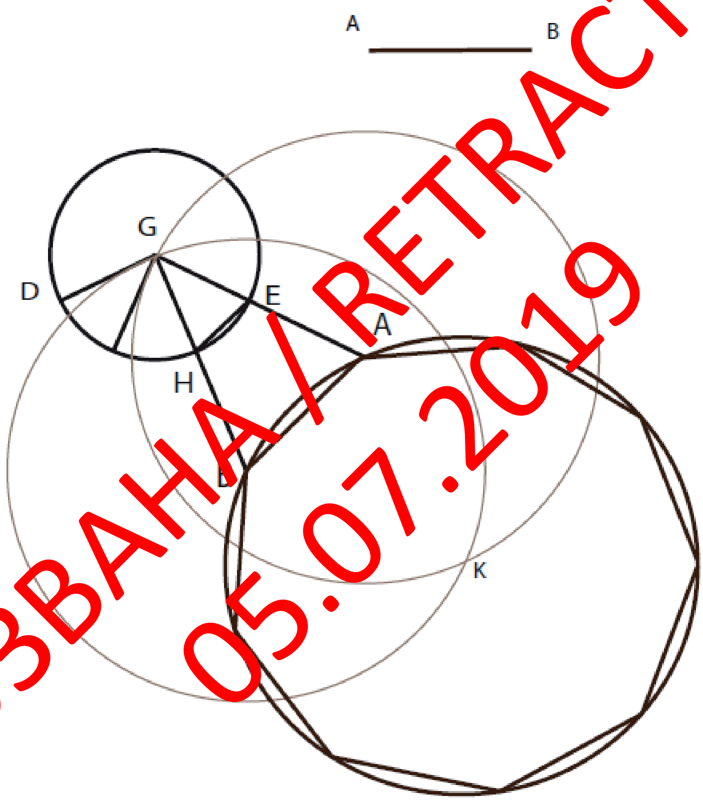

Рис. 4. Построение девятиугольника

Аль-Фараби здесь сторону правильного девятиугольника определяет с помощью трисекции дуги, равное одной трети окружности. Если обозначить sin (β / 3) = x, то sin (β) = 3 · x – 4 · x^3, где β = α / 2, α = 120°. Отсюда получим значение с точностью до тысячных, равное 2 · R · sin (360° / 18) ≈ R · 0,684.

Отметим, что построение правильных многоугольников с данной стороной при n = 7, 8, 9, 10 отсутствует у Евклида.

Таким образом, изучение приведенных задач на геометрические построения и разработанный нами набор библиотек вполне могут привести к большим достижениям при изучении их учащимися. Например, наряду с заданием в виде алгоритмов построения отдельных многоугольников, удобных для обучения, приведены возможности алгоритмизации построения многоугольников высшего порядка с помощью построения многоугольников меньшего порядка. Эти алгоритмические подходы позволяют, при обучении геометрическим построениям Аль-Фараби, создать систему дидактических средств электронного обучения. При этом можно эффективно осуществить и обучение математике — обучение учащихся построению многоугольников методами электронного обучения, с одной стороны, и обучение информатике — обучение алгоритмам построения отдельных многоугольников, с другой.

Особый интерес при обучении представляют мультимедийные образовательные ресурсы, позволяющие наглядно демонстрировать в этих задачах на построение всевозможные искусные приемы, предлагаемые Аль-Фараби. Целенаправленная работа по разработке этих ресурсов в настоящее время ведется в Казахском национальном педагогическом университете имени Абая в рамках изучения математического наследия Аль-Фараби.

На данный момент уже разработаны анимационные ролики практически всех геометрических построений, описанных Аль-Фараби, и они размещены на специально созданном научно-методическом образовательном портале. Главная их особенность в том, что работают они на большом числе операционных систем, предоставляя возможность осуществления доступа к ним с любых компьютерных устройств, в том числе мобильных.

Литература

1. *Аль-Фараби.* Математические трактаты. Алма-Ата: Наука, 1972. 318 с.
2. *Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Бостанов Б.Г., Джанабердиева С.А.* Әл Фәрәбидің математикалық мұралары заманауи білім беру аясында // ҚазҰУ Хабаршысы. Саясаттану, философия, мәдениеттану сериясы. 2015. № 2 (51), 50–57 б.
3. *Кубесов А.К.* Математическое наследие Аль-Фараби. Алма-Ата: Наука, 1974. 246 с.
4. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? (Элементарный очерк идей и методов). 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦМНО, 2001. 586 с.
5. *Bidaybekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G.* The mathematical heritage of Al-Farabi by A. Kubesov in modern conditions of educations // Materials IX of the International mathematical congress of ISAAC (Krakow, Poland, on August 5–9, 2013). Krakow, 2013. P. 33–34.
6. *Carry J. Tee, Kubesov A.K.* The Mathematical Heritage of al-Farabi // Journal for the history of Arabic science. 1978. № 1. P. 150–153.
7. *Rescher N.* Al-Farabi: An Annotated Bibliography. University of Pittsburgh, 1962.

Literatura

1. *Al’-Farabi.* Matematicheskie traktaty’. Alma-Ata: Nauka, 1972. 318 s.
2. *Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G., Dzhanaberdieva S.A.* Əl Fərəbidiң matematikalyқ mұralary zamanaui bilim beru ayasynda // ҚazҰU Xabarshysy. Sayasattanu, filosofiya, mədeniettanu seriyasy. 2015. № 2 (51), 50–57 b.

3. *Kubesov A.K.* Matematicheskoe nasledie Al'-Farabi. Alma-Ata: Nauka, 1974. 246 s.

4. *Kurant R., Robbins G.* Chto takoe matematika? (E'lementarny'j ocherk idej i metodov). 3-e izd., ispr. i dop. M.: MCMNO, 2001. 586 s.

5. *Bidaybekov E.Y., Kamalova G.B., Bostanov B.G.* The mathematical heritage of Al-Farabi by A. Kubesov in modern conditions of educations // Materials IX of the International mathematical congress of ISAAC (Krakow, Poland, on August 5–9, 2013). Krakow, 2013. P. 33–34.

6. *Carry J. Tee, Kubesov A.K.* The Mathematical Heritage of al-Farabi // Journal for the history of Arabic science. 1978. № 1. P. 150–153.

7. *Rescher N.* Al-Farabi: An Annotated Bibliography. University of Pittsburgh, 1962.

E.Y. Bidaybekov,
G.B. Kamalova,
B.G. Bostanov

The Development of Algorithmic Culture of Schoolchildren on the Basis of Al-Farabi's Geometry and Algorithms

The article draws attention to the role of ideas and methods of al-Farabi's geometrical constructions and computational algorithms in the development of algorithmic culture of schoolchildren. We expound computational algorithms of al-Farabi's geometric constructions following A. Kubesov's studies. The authors identify opportunities to use in modern mathematical education of algorithmic approach at teaching the solution of mathematical problems.

Keywords: algorithmic culture, Al-Farabi's geometric heritage; computational algorithms; geometric construction with the help of compass and ruler; student.