

**Е.Ы. Бидайбеков, В.С. Корнилов,
Г.Б. Камалова, Н.Ш. Акимжан**

Система компьютерной математики Mathcad при обучении студентов вузов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

В статье излагаются вычислительные алгоритмы решения некоторых обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые входят в содержание обучения студентов физико-математических направлений подготовки. Приводятся результаты расчетов численных решений соответствующих обратных задач в системе компьютерной математики Mathcad.

Ключевые слова: обучение обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений; численный метод решения обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения; система компьютерной математики Mathcad; студент.

В настоящее время в некоторых вузах для бакалавров и магистрантов, обучающихся по направлениям подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика», 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки» и другим направлениям подготовки, преподаются курсы по выбору, посвященные обратным задачам для дифференциальных уравнений, содержание которых формируется на основе теории и практики обратных задач математической физики — одного из направлений прикладной математики. Фундаментальный вклад в создание теории обратных задач математической физики внесли работы В.А. Амбарцумяна, М.Г. Крейна, М.М. Лаврентьева, Б.М. Левитана, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, А.Н. Тихонова и других ученых. В настоящее время это направление прикладной математики развивается в исследованиях А.В. Баева, М.И. Белишева, П.Н. Вабишевича, А.О. Ватульяна, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, Е.В. Корчагиной, А.В. Полякова, В.Г. Романова, В.С. Сизикова, Ю.М. Сироты, Ю.М. Тимофеева, Г.В. Хромовой, В.Г. Чередниченко, В.Б. Черепенникова, В.А. Юрко, В.Г. Яхно и других ученых (см., например, [1–3, 6, 9, 10, 16, 20, 22, 23, 25, 26, 28]).

В процессе обучения обратным задачам на лабораторных занятиях в компьютерных классах студенты в процессе решения обратных задач применяют компьютерные технологии, среди которых системы компьютерной математики

(Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab и др.), которые в настоящее время широко используются в вузовском образовании (см., например, [8, 11–15, 21, 23, 27]) и позволяют реализовать дидактические принципы обучения. Подобные лабораторные занятия по обратным задачам интегрируют теоретико-методологические знания, практические умения и навыки студентов, которые в данном случае выступают в роли исследователей обратных задач для дифференциальных уравнений.

Один из разделов содержания обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений посвящен обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и включает такие обратные задачи, как обратные задачи определения коэффициентов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, обратные задачи определения правой части дифференциальных уравнений, обратные задачи теории рассеяния, обратные задачи вариационного исчисления. При обучении студентов обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений большое внимание уделяется приближенным методам их решения, так как разработка и использование этих методов является важнейшим аспектом развития теории и практики обратных задач математической физики. Это обстоятельство связано с тем, что обратные задачи имеют некоторые математические особенности. Одна из таких особенностей — нелинейность, которая, как правило, не позволяет получить точное решение обратной задачи в виде формулы. Методика исследования обратных задач предполагает поэтапное исследование свойств решения соответствующей прямой задачи, а затем — обратной. Как правило, строится замкнутая система уравнений обратной задачи в виде интегро-дифференциальных уравнений, которая может быть решена при помощи итерационных процессов, включающих в себя многократное решение соответствующих прямых задач. В этой ситуации численные методы выступают в качестве эффективных методов исследования обратных задач.

Основы численных методов решения обратных задач были заложены фундаментальными работами А.С. Алексеева, А.Л. Бухгейма, П.Н. Вабишевича, В.И. Дмитриева, С.И. Кабанихина, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, А.А. Самарского, В.Г. Яхно и других ученых и в настоящее время применяются многими авторами при исследовании широкого круга обратных задач, в том числе обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [9, 20, 22, 23, 27]).

В процессе обучения обратным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений студенты находят приближенные решения обратных задач при помощи вычислительных алгоритмов и используют компьютерные технологии для их реализации. Изложим несколько, вошедших в содержание такого обучения, конечно-разностных алгоритмов решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, реализованных в системе компьютерной математики Mathcad.

Обратная задача 1. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестным коэффициентом

$$y'' + a(x) y = 0, y = y(x, \alpha), y'' = \frac{d^2}{dx^2} y, \quad (1)$$

$$a(x) \in C(R), x, \alpha \in R,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(\alpha, \alpha) = 1, y'(\alpha, \alpha) = 0, \alpha \in R. \quad (2)$$

В (1)–(2) x — независимая переменная, α — числовой параметр.

От студентов требуется по заданной дополнительной информации о решении задачи в уравнениях (1)–(2) при фиксированном значении переменной $x = x^*$

$$y(x^*, \alpha) = \varphi(\alpha), \quad (3)$$

вычислить неизвестный коэффициент $a(x)$ и найти решение $y = y(x, \alpha)$.

При рассмотрении обратной задачи 1, до студентов доводятся сведения о том, что уравнение (1), которое в литературе встречается под названием уравнения Хилла [24], используется в геофизике, электродинамике, в волновых процессах, гармонических колебаниях и др. Вопросами корректности решения прямой задачи для этого уравнения в свое время занимались А.М. Ляпунов, Н.Е. Жуковский, М.Г. Крейн, Ж. Борг, В.М. Старжимский, В.А. Якубович и другие ученые.

Кроме того, уравнение Хилла (1), при помощи введения новой функции

$$U(x, \alpha) = \frac{y'(x, \alpha)}{y(x, \alpha)},$$

может быть сведено к уравнению Риккати

$$U' + U^2 = -a(x).$$

Существование и единственность решения обратной задачи (1)–(3) исследованы в работе [2].

Построение конечно-разностного алгоритма нахождения приближенного решения обратной задачи студенты начинают с того, что непрерывную область изменения аргументов x, α заменяют дискретным множеством $D(h) = \{(k, i) : k = \overline{-n, n}, i = \overline{-n, n}\}, h > 0$. Затем в узлах $(k, i), k, i = \overline{-n, n}$ введенной области $D(h)$ определяют сеточные функции целочисленных аргументов $v(k, i) = v_k^i, a(k) = a_k, \varphi(i) = \varphi_i$ и значения функций $y(x_k, \alpha_i), a(x_k), \varphi(\alpha_i)$ в них заменяют соответствующими значениями сеточных функций v_k^i, a_k, φ_i .

После чего соотношения (1)–(3) студенты заменяют конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{v_{k+1}^i - 2v_k^i + v_{k-1}^i}{h^2} + a_k v_k^i = 0, (i, k) \in D(h), \quad (4)$$

$$v_i^i = 1, i = \overline{-n, n}, \quad (5)$$

$$\frac{v_{i+1}^i - v_{i-1}^i}{2t} = 0, i = \overline{-n+1, n-1}, \quad (6)$$

$$v_0^i = \overline{\varphi_i}, i = \overline{-n, n}, \quad (7)$$

из которых требуется определить неизвестные сеточные функции $\{v_k^i\}, \{a_k\}, k, i = \overline{-n, n}$.

Изложим вычислительный алгоритм их нахождения. Введем обозначение: $2 - a_k h^2 = c_k$. Положив в (4) $i = k$ и учитывая (5)–(6), определим выражения для c_k :

$$\text{при } k < 0: c_k = 2v_{k+1}^k, \quad (8)$$

$$\text{при } k > 0: c_k = 2v_{k-1}^k. \quad (9)$$

Рассмотрим случай $k > 0$. Полагая в (9) $i = k = 1$, найдем $c_1 = 2\varphi_1$. При $i = k = 2$ имеем $c_2 = 2v_1^2$, где v_1^2 определяется из соотношений (4)–(5) при $i = 2, k = 1$.

$$\begin{cases} v_0^2 - c_1 v_1^2 + v_2^2 = 0, \\ v_0^2 = \overline{\varphi_2}, v_2^2 = 1. \end{cases}$$

Для определения каждого из следующих значений $c_k, k = \overline{3, n}$, необходимо предварительно найти $v_k^i, i = \overline{3, n}, k = \overline{1, i-1}$. Для этого имеем трехточечные задачи с краевыми условиями, которые могут быть решены методом прогонки:

$$\begin{cases} v_{k+1}^i - c_k v_k^i + v_{k-1}^i = 0, \\ v_0^i = \overline{\varphi_i}, v_i^i = 1, \\ i = \overline{3, n}, k = \overline{1, i-1}. \end{cases}$$

Аналогично могут быть найдены и значения c_k при $k < 0$. Это потребует предварительного определения $v_k^i, i = \overline{-1, -n}, k = \overline{-1, i-1}$.

Для нахождения c_0 может быть использовано соотношение $a_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{x}$,

представленное в терминах сеточной функции φ_i : $a_0 = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2}$.

Чтобы определить значения функции v_k^i в оставшейся области, следует воспользоваться выражением (4), предварительно преобразовав к виду:

$$v_{k+1}^i = c_k v_k^i - v_{k-1}^i, \quad k = \overline{0, n-1}, i = \overline{-n, k-1},$$

$$v_{k-1}^i = c_k v_k^i - v_{k+1}^i, \quad k = \overline{-n+1, 0}, i = \overline{k+1, n}.$$

Построенный алгоритм дает удовлетворительное приближение $\{a_k\}$ к истинному значению коэффициента $a(x)$, а сеточная функция $\{v_k^i\}, k, i = \overline{-n, n}$ достаточно хорошо аппроксимирует непрерывную функцию $u(x, a)$.

Вопрос о сходимости разностной схемы остается пока открытым.

На рисунках 1–2 представлены результаты расчетов в системе компьютерной математики Mathcad при $a(x) = -4, h = 0,2, n = 5$.

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		-5
-5	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313	27.308	-5	-4.054
-4	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	18.313	-4	-4.054
-3	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	12.287	-3	-4.054
-2	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	8.253	-2	-4.054
-1	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	5.557	-1	-4.054
0	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	3.762	0	-4.054
1	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2.577	1	-4.054
2	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	1.811	2	-4.054
3	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	1.337	3	-4.054
4	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	1.081	4	-4.054
5	27.308	18.313	12.287	8.253	5.557	3.762	2.577	1.811	1.337	1.081	1	5	-4.054

Рис. 1. Результаты численного решения обратной задачи (1)–(3)

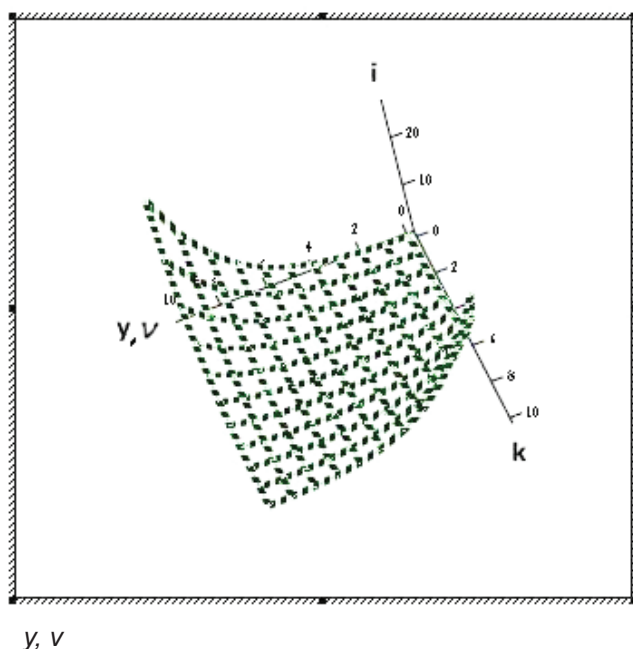


Рис. 2. Графическая интерпретация численного решения обратной задачи (1)–(3)

Приближенное решение на рисунке 2 представлено пунктирной линией (черного цвета), точное решение — сплошной (зеленой) линией. Точность при необходимости можно повысить путем уменьшения шага h .

Обратная задача 2. На отрезке $[0, T]$ рассматривается краевая задача:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (10)$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d. \quad (11)$$

В (10)–(11) $t \in [0, T]$, $x, d, f(t)$ — n -мерные векторы-столбцы, A, B и C — матрицы порядка $n \times n$, причем $A(t)$ и $f(t)$ — непрерывны на отрезке $[0, T]$.

От студентов требуется определить вектор-функцию $x(t)$, непрерывную на отрезке $[0, T]$, непрерывно-дифференцируемую на $(0, T)$, удовлетворяющую краевым условиям (11) и дифференциальному уравнению (10).

Введя обозначение $x(0) \equiv \lambda$ и осуществляя замену искомой функции $u(t) = x(t) - \lambda$, решение рассматриваемой краевой задачи студенты сводят к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d u}{d t} = A(t)u + A(t)\lambda + f(t), \quad u(0) = 0, \quad (12)$$

$$(B + C)\lambda + Cu(T) = d, \quad (13)$$

т. е. к нахождению пары $\{\lambda, u(t)\}$, удовлетворяющей равенствам (12)–(13).

Полученная обратная задача (12)–(13) эквивалентна исходной задаче (10)–(11) в том смысле, что если $\{\lambda, u(t)\}$ — решение обратной задачи (12)–(13), то $x(t) = \lambda + u(t)$ — является решением обратной задачи (10)–(11), и наоборот, если $x(t)$ — решение обратной задачи (10)–(11), то пара $\{x(0), x(t) - x(0)\}$ является решением обратной задачи (12)–(13). Алгоритм решения полученной обратной задачи студенты строят в соответствии с методикой, изложенной в работе [1]. Алгоритм решения этой обратной задачи начинается с того, что путем интегрирования уравнения (12) от 0 до T определяется:

$$u(T) = \int_0^T A(t)u(t) dt + \lambda \int_0^T A(t) dt + \int_0^T f(t) dt.$$

Осуществляя его подстановку в краевые условия (13) и предполагая, что матрица $M = B + C \left[I + \int_0^T A(t) dt \right]$ имеет обратную ($\det M \neq 0$), студенты получают уравнение относительно λ :

$$\lambda = M^{-1} \cdot \left[d - C \int_0^T f(t) dt - C \int_0^T A(t)u(t) dt \right]. \quad (14)$$

Решение обратной задачи (12)–(13) — пару $\{\lambda^*, u^*(t)\}$ студенты ищут по следующему алгоритму. За начальное приближение берется

$$\lambda^{(0)} = M^{-1} \cdot \left[d - C \int_0^T f(t) dt \right] \text{ и } u^{(0)}(t) \text{ — являющееся решением задачи Коши (12)}$$

при $\lambda = \lambda^{(0)}$.

После подстановки $u^{(0)}(t)$ в правую часть уравнения (14) получается:

$$\lambda^{(1)} = M^{-1} \cdot \left[d - C \int_0^T f(t) dt - C \int_0^T A(t)u^{(0)}(t) dt \right],$$

а $u^{(1)}(t)$ находится как решение задачи Коши (3) при $\lambda = \lambda^{(1)}$.

Продолжая итерационный процесс аналогично изложенному, по известному $\{\lambda^{(k-1)}, u^{(k-1)}(t)\}$ студенты находят следующее приближение $\{\lambda^{(k)}, u^{(k)}(t)\}$.

Достаточные условия сходимости итерационного процесса и однозначной разрешимости обратной задачи (10)–(11) студентами устанавливаются путем доказательства теоремы 1. Приведем ее формулировку без доказательства.

Теорема 1. Если выполнены условия:

1) для матрицы M существует обратная M^{-1} и $\|A(t)\| \leq \alpha(t)$;

$$2) \quad q = \|M^{-1}\| \cdot \|C\| \cdot \left[\exp\left(\int_0^T \alpha(t) dt\right) - 1 - \int_0^T \alpha(t) dt \right] < 1,$$

то обратная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12)–(13), а следовательно, и эквивалентная ей двухточечная краевая задача (10)–(11) имеет единственное решение и приведенный выше алгоритм сходится.

Вышеизложенный алгоритм дает удовлетворительное приближение к решению обратных задач для дифференциальных уравнений с параметром вида (12)–(13), к которым путем соответствующей замены приводятся краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В дальнейшем данный алгоритм реализуется студентами в виде программы в системе компьютерной математики Mathcad. Приведем несколько таких учебных обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых студентами найдены с использованием Mathcad.

Обратная задача 3. На отрезке $[0; 0,5]$ задана краевая задача:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (\sin t) \cdot y + t^2 + 1, t \in (0; 0,5), \quad (15)$$

$$y(0) = 1, y(0,5) = 0. \quad (16)$$

Сведя ее к эквивалентной обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, студенты получают:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, u(0) = 0, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0,5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Для полученной задачи все условия теоремы выполняются: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,

$\alpha(t) = 1$, $q = 0,45$, поэтому изложенный выше алгоритм сходится. На рисунках 3–4 приведены полученные студентами результаты численных расчетов.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.2799 \end{pmatrix}$$

$$u(0.001) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.2228 & 0.1046 \\ -0.4348 & 0.2168 \\ -0.6353 & 0.3344 \\ -0.8238 & 0.4558 \\ -1 & 0.5798 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Численное решение обратной задачи (17)–(18)

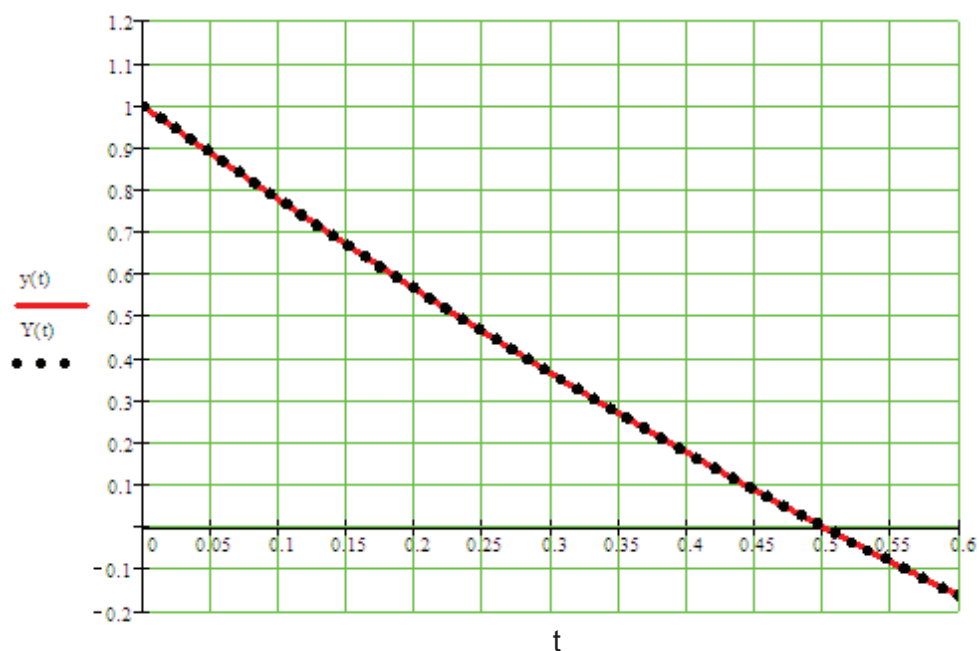


Рис. 4. Графическая интерпретация решения обратной задачи (15)–(16)

Поскольку точное решение рассматриваемой задачи найти не просто, то на рисунке 4 для сравнения пунктирной линией приведено ее решение $Y(t)$, полученное конечно-разностным методом.

При этом до сведения студентов доводится тот факт, что условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность при невыполнении этих условий может оказаться как расходящейся, так и сходящейся. Для наглядности приведем примеры.

Пример 2. На отрезке $[0; 1]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2t \cdot \frac{dy}{dt} - 2 \cdot y = -4 \cdot t,$$

$$y(0) - y'(0) = 0, y(1) = 1 + e = 3,718,$$

которую можно свести к эквивалентной обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2t \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2t \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \end{pmatrix}, u(0) = 0, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + e \end{pmatrix}.$$

Для этой задачи $\alpha(t) = 3, M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,333 & 0,667 \\ -0,667 & 0,667 \end{pmatrix}$, $q = 2,38$. Видно, что второе условие теоремы 1 для нее не выполняется. Поэтому итерационный процесс, реализованный в программе Mathcad, расходится.

Пример 3. Для заданной на отрезке $[0; 0,5]$ краевой задачи

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - a^2 \cdot z = 0, t \in (0; 0,5), \quad (19)$$

$$z(0) = z_0, z(0,5) = z_1, \quad (20)$$

даже при невыполнении условий теоремы, итерационная последовательность сходится.

Действительно, осуществляя эквивалентные преобразования, сведем ее к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda, u(0) = 0, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(0,5) = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Возьмем $a = 1, z_0 = 0, z_1 = 1$. В этом случае $\alpha(t) = 1$. Непосредственные вычисления показывают, что матрица M обратима, но второе условие теоремы не выполняется ($q < 1$). Несмотря на это, итерационная последовательность сходится. Результаты расчетов представлены на рисунках 5–6.

Здесь для сравнения приближенного решения $y(t)$ задачи (21)–(22), полученного рассмотренным выше методом, представлено точное решение $Yt(t)$ исходной задачи, а также ее решение $Yp(t)$, полученное конечно-разностным методом.

Как видно из сравнительного анализа решений, предлагаемый алгоритм дает достаточно хорошее приближение к решению обратных задач для системы дифференциальных уравнений с параметром вида (12)–(13) и эквивалентной ей системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (10)–(11) и может с успехом применяться на практике.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.919 \end{pmatrix}$$

$$u(0.0001) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.1922 & 9.6031 \times 10^{-3} \\ 0.3864 & 0.0385 \\ 0.5844 & 0.087 \\ 0.7882 & 0.1556 \\ 1 & 0.2449 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Численное решение обратной задачи (21)–(22)

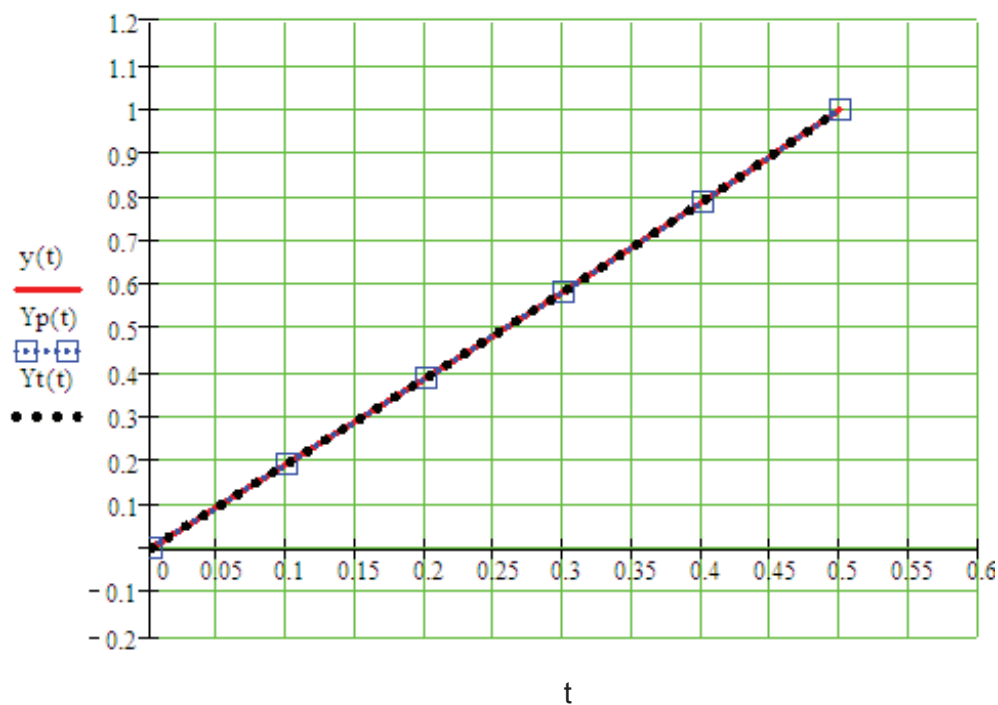


Рис. 6. Графическая интерпретация решения обратной задачи (19)–(20)

В заключение необходимо отметить, что использование для реализации вычислительных алгоритмов решения обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений системы компьютерной математики Mathcad позволяет студентам наглядно представить вычислительный алгоритм решения соответствующей обратной задачи, проанализировать его, быстро получить новые результаты численных расчетов при изменении данных и визуализировать их графически.

Литература

1. Бидайбеков Е.Ы. Об обратных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений // Математические заметки. 1979. Т. 26. Вып. 1. С. 53–59.
2. Бидайбеков Е.Ы. О некоторых обратных задачах для линейных дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. Серия физико-математическая. 1981. № 1. С. 15–22.
3. Бидайбеков Е.Ы., Камалова Г.Б., Джумабаева Д.Д. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений сведением к обратным задачам // Вестник АГУ. Серия физико-математическая. 2002. № 1 (5). С. 57–63.
4. Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б. Обучение будущих учителей математики и информатики обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2014. № 3 (29). С. 57–69.
5. Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Камалова Г.Б., Акимжан Н.Ш. Экспериментально-педагогическая деятельность при обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Казахского национального педагогического университета им. Абая. Серия «Физико-математические науки». Алматы, 2014. № 3 (47). С. 76–80.
6. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
7. Джумабаев Д.С. Сведение краевых задач к задачам с параметром и обоснование метода стрельбы // Известия АН КазССР, 1978. № 5. С. 34–40.
8. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2014. 800 с.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи: учебник. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 458 с.
10. Корнилов В.С. Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учеб. пособие. М.: МГПУ, 2005. 359 с.
11. Корнилов В.С. Компьютерные математические пакеты в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» как дидактическое средство обучения // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2005. № 1 (4). С. 114–122.
12. Корнилов В.С. Реализация дидактических принципов обучения при использовании образовательных электронных ресурсов в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2006. № 1 (3). С. 40–44.
13. Корнилов В.С. Образовательные электронные ресурсы в обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Электронные образовательные издания и ресурсы. Теория и практика: Бюллетень Центра информатики и информационных технологий в образовании Института содержания и методов обучения Российской академии образования. Вып. 1. М.: ИСМО РАО, 2006. С. 30–36.
14. Корнилов В.С. Использование компьютерных систем в обучении обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2007. № 2 (9). С. 131–132.
15. Корнилов В.С. Информатизация обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2008. № 1 (11). С. 98–100.

16. Корнилов В.С. История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений — составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2009. № 1 (17). С. 108–113.
17. Корнилов В.С. Методические аспекты обучения студентов вузов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Бюллетень лаборатории математического, естественно-научного образования и информатизации. Рец. сб. научн. тр. Т. I. Воронеж: Научная книга, 2012. С. 44–51.
18. Корнилов В.С. Обратные задачи в учебных дисциплинах прикладной математики // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2014. № 1 (27). С. 60–68.
19. Корнилов В.С. Обучение студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений как фактор формирования компетентности в области прикладной математики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2015. № 1. С. 63–72.
20. Корчагина Е.В. Обратная задача вариационного исчисления для обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка: дис. канд. ... физ.-мат. наук. Воронеж, 2003. 113 с.
21. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15: учеб. курс. СПб.: Питер, 2011. 400 с.
22. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. 252 с.
23. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab: учебник для студентов вузов. СПб.: Лань, 2011. 251 с.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.: Наука, 1974. 674 с.
25. Тимофеев Ю.М., Поляков А.В. Математические аспекты решения обратных задач атмосферной оптики: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 2001. 188 с.
26. Хромова Г.В. Об обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 709–716.
27. Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и Matlab. М.: ИД «Вильямс», 2008. 1097 с.
28. Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с запаздыванием // Механика. Математика: сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. С. 90–93.
29. Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B. Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26–31, 2014). Fethiye, Turkey, 2014. P. 69.

Literatura

1. Bidajbekov E.Y. Ob obratny'x zadachax dlya oby'knovenny'x differencial'ny'x uravnenij // Matematicheskie zametki. 1979. T. 26. Vy'p. 1. S. 53–59.
2. Bidajbekov E.Y. O nekotory'x obratny'x zadachax dlya linejny'x differencial'ny'x uravnenij // Izvestiya AN KazSSR. Seriya fiziko-matematicheskaya. 1981. № 1. S. 15–22.
3. Bidajbekov E.Y., Kamalova G.B., Dzhumabaeva D.D. Reshenie kraevy'x zadach dlya oby'knovenny'x differencial'ny'x uravnenij svedeniem k obratny'm zadacham // Vestnik AGU. Seriya fiziko-matematicheskaya. 2002. № 1 (5). S. 57–63.

4. *Bidajbekov E.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B.* Obuchenie budushhix uchitelej matematiki i informatiki obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2014. № 3 (29). S. 57–69.

5. *Bidajbekov E.Y., Kornilov V.S., Kamalova G.B., Akimzhan N.Sh.* E'ksperimental'no-pedagogicheskaya deyatel'nost' pri obuchenii studentov obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Kazaxskogo nacional'nogo pedagogicheskogo universiteta im. Abaya. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». Almaty, 2014. № 3 (47). S. 76–80.

6. *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriyu obratny'x zadach: ucheb. posobie. M.: Izd-vo MGU, 1994. 207 s.

7. *Dzhumabaev D.S.* Svedenie kraevy'x zadach k zadacham s parametrom i obosnovanie metoda strel'by' // Izvestiya AN KazSSR, 1978. № 5. S. 34–40.

8. *D'yakonov V.P.* Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskix raschetax. M.: DMK Press, 2014. 800 s.

9. *Kabanixin S.I.* Obratny'e i nekorrektny'e zadachi: uchebnik. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2009. 458 s.

10. *Kornilov V.S.* Nekotory'e obratny'e zadachi identifikacii parametrov matematicheskix modelej: ucheb. posobie. M.: MGPU, 2005. 359 s.

11. *Kornilov V.S.* Komp'yuterny'e matematicheskie pakety' v kurse «Obratny'e zadachi dlya differencial'ny'x uravnenij» kak didakticheskoe sredstvo obucheniya // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2005. № 1 (4). S. 114–122.

12. *Kornilov V.S.* Realizaciya didakticheskix principov obucheniya pri ispol'zovanii obrazovatel'ny'x e'lektronny'x resursov v kurse «Obratny'e zadachi dlya differencial'ny'x uravnenij» // Vestnik Rossijskogo universiteta družby' narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2006. № 1 (3). S. 40–44.

13. *Kornilov V.S.* Obrazovatel'ny'e e'lektronny'e resursy' v obuchenii obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // E'lektronny'e obrazovatel'ny'e izdaniya i resursy'. Teoriya i praktika: Byulleten' Centra informatiki i informacionny'x texnologij v obrazovanii Instituta sodержaniya i metodov obucheniya Rossijskoj akademii obrazovaniya. Vy'p. 1. M.: ISMO RAO, 2006. S. 30–36.

14. *Kornilov V.S.* Ispol'zovanie komp'yuterny'x sistem v obuchenii obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2007. № 2 (9). S. 131–132.

15. *Kornilov V.S.* Informatizaciya obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2008. № 1 (11). S. 98–100.

16. *Kornilov V.S.* Istoriya razvitiya teorii obratny'x zadach dlya differencial'ny'x uravnenij — sostavlyayushhaya gumanitarnogo potenciala obucheniya prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2009. № 1 (17). S. 108–113.

17. *Kornilov V.S.* Metodicheskie aspekty' obucheniya studentov vuzov obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Byulleten' laboratorii matematicheskogo, estestvenno-nauchnogo obrazovaniya i informatizacii. Rec. sb. nauchn. tr. T. I. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2012. S. 44–51.

18. Kornilov V.S. Obratny'e zadachi v uchebny'x disciplinax prikladnoj matematiki // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2014. № 1 (27). S. 60–68.
19. Kornilov V.S. Obuchenie studentov obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij kak faktor formirovaniya kompetentnosti v oblasti prikladnoj matematiki // Vestnik Rossijskogo universiteta družby' narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2015. № 1. S. 63–72.
20. Korchagina E.V. Obratnaya zadacha variacionnogo ischisleniya dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya shestogo poryadka: dis. kand. ... fiz.-mat. nauk. Voronezh, 2003. 113 s.
21. Makarov E. Inzhenerny'e raschety' v Mathcad 15: ucheb. kurs. SPb.: Piter, 2011. 400 s.
22. Romanov V.G. Obratny'e zadachi dlya differencial'ny'x uravnenij. Novosibirsk: NGU, 1973. 252 s.
23. Sizikov V.S. Obratny'e prikladny'e zadachi i MatLab: uchebnik dlya studentov vuzov. SPb.: Lan', 2011. 251 s.
24. Smirnov V.I. Kurs vy'sshej matematiki. T. 3, ch. 2. M.: Nauka, 1974. 674 s.
25. Timofeev Yu.M., Polyakov A.V. Matematicheskie aspekty' resheniya obratny'x zadach atmosfernoj optiki: ucheb. posobie. SPb.: Izd-vo Sankt-Peterburg. un-ta, 2001. 188 s.
26. Xromova G.V. Ob obratnoj zadache dlya oby'knovennogo differencial'nogo uravneniya // Fundamental'naya i prikladnaya matematika. 1998. T. 4. Vy'p. 2. S. 709–716.
27. E'dwards Ch.G., Penni D.E'. Differencial'ny'e uravneniya i kraevy'e zadachi: modelirovanie i vy'chislenie s pomoshh'yu Mathematica, Maple i Matlab. M.: ID «Vil'yams», 2008. 1097 s.
28. Yurko V.A. Obratnaya zadacha dlya differencial'ny'x uravnenij s zapazdy'vaniem // Mexanika. Matematika: sb. nauch. tr. Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta, 2012. S. 90–93.
29. Bidaybekov E.I., Kornilov V.S., Kamalova G.B. Inverse Problems for differential equations in education // Inverse Problems: Modeling and Simulation (IPMS-2014): Abstracts of the 7th International conference» (Fethiye, Turkey, May 26–31, 2014). Fethiye, Turkey, 2014. P. 69.

**E.Y. Bidaybekov, V.S. Kornilov,
G.B. Kamalov, N.S. Akimzhan**

System of Computer Mathematics Mathcad at Teaching University Students Inverse Problems for Ordinary Differential Equations

The article expounds the computational algorithms for the solution of some inverse problems for ordinary differential equations, which are included in the content of training of students of physical and mathematical training directions. The results of calculations of numerical solutions of the corresponding inverse problems in system of computer mathematics Mathcad are given.

Keywords: teaching inverse problems for ordinary differential equations; numerical method for solution of the inverse problem for an ordinary differential equation; the system of computer mathematics Mathcad; a student.