В.С. Корнилов

Реализация прикладной направленности обучения студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений

В статье обращается внимание на подготовку специалистов в области прикладной математики. Рассматривается прикладной характер обучения студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений обратным задачам для дифференциальных уравнений, теория которых является одним из направлений современной прикладной математики. Приводится постановка обратной задачи для системы уравнений Максвелла, вошедшая в содержание такого обучения, схема ее решения с формулировкой соответствующих итоговых теорем. Делаются выводы о формировании у студентов компетентности в области прикладной математики в результате обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений; прикладная математика; прикладная направленность обучения; студент.

Современное развитие промышленности, экономики, сельского хозяйства, обороноспособности и других сфер человеческой деятельности нуждаются в практической реализации инновационных прикладных исследований. Важнейшее условие реализации подобных проектов — наличие вузовской подготовки высокопрофессиональных, инициативных специалистов, в том числе в области прикладной математики, умеющих самостоятельно разрабатывать и грамотно реализовывать на практике наукоемкие, природоохранные технологии.

На созданных в конце 1960-х – начале 1970-х годов прошлого столетия факультетах прикладной математики (либо направления, либо специальности прикладной математики) классических университетов и высших технических учебных заведений Москвы, Санкт-Петербурга, Казани, Екатеринбурга, Новосибирска, Томска, Красноярска и других городов России в настоящее время готовят высококвалифицированных специалистов в области прикладной математики. В процессе обучения прикладной математике студенты приобретают фундаментальные знания по математическому и функциональному анализу, алгебре и геометрии, теории фракталов, обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики, компьютерным технологиям и другим предметным областям. У них формируются умения и навыки исследования прикладных задач при помощи математического моделирования и вычислительного эксперимента. В результате такие выпускники в своей профессиональной деятельности способны строить корректные математические модели изучаемых процессов и применять для их исследования эффективные методы современной мировой науки. Наличие у таких выпускников вышеотмеченных профессиональных качеств наглядно демонстрирует их компетентность в области прикладной математики.

Существующая потребность именно в таких компетентных специалистах в области прикладной математики инициирует реформирование вузовского прикладного математического образования. И такая работа сегодня, при поддержке государства, ведется Министерством образования и науки России. Им разрабатываются и внедряются в вузовский процесс государственные образовательные стандарты высшего профессионального образования России нового поколения, реализующие компетентностный подход. Проблема формирования профессиональной компетентности студентов находит свое развитие в исследованиях В.И. Байденко, А.С. Белкина, О.Г. Берестневой, Е.В. Бондаревской, Л.Ю. Васяк, О.А. Валихановой, А.А. Вербицкого, И.А. Зимней, И.К. Иляшенко, М.Д. Ильязовой, М.С. Казанчян, Н.А. Козловой, И.П. Мединцевой, Е.С. Муниц, М.Л. Палеевой, В.Г. Плаховой, Н.П. Пучкова, Л.Б. Усовой, А.В. Хуторского, Д.У. Шакировой и других авторов.

Определенный вклад в формирование у студентов компетентности в области прикладной математики вносит обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений (см., например, [2; 5; 6; 8; 11; 16; 20]). Содержание такого обучения формируется на основе теории обратных задач математической физики — одного из направлений современной прикладной математики (см., например, [21]). Широкий интерес к обратным задачам математической физики обусловлен их большой прикладной важностью. Подобные обратные задачи находят свое применение в промышленности (дефектоскопия, неразрушающий контроль, управление технологическими процессами и др.), экономике (оптимальное управление, финансовая математика и др.), медицине (УЗИ, рентген и др.), геофизике (сейсморазведка, электроразведка, магниторазведка и др.), экологии (диагностика состояния воздуха, воды, земной поверхности и др.), биологии (анализ молекул, исследование популяций и др.), химии (молекулярная химия, сорбция и др.), математике (интегральные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и др.), физике (электродинамика, квантовая теория рассеяния и др.) и т. д. (см., например, [2; 5; 6; 12; 20]). Это научное направление прикладной математики развивается в исследованиях А.К. Амирова, Ю.Е. Аниконова, А.В. Баева, А.С. Барашкова, М.И. Белишева, П.Н. Вабишевича, А.О. Ватульяна, В.В. Васина, А.В. Гончарского, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, В.И. Прийменко, В.Г. Романова, А.М. Федотова, В.А. Чеверды, В.Г. Чередниченко, В.А. Юрко, В.Г. Яхно, J. Gottlieb, M. Grasselli, G. Kunetz, A. Lorenzi, M. Yamamoto и других ученых.

Неслучайно в настоящее время обучение обратным задачам для дифференциальных уравнений осуществляется во многих российских вузах, среди которых Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургский государственный университет, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Уральский государственный университет, Ростовский государственный университет и другие.

В процессе обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений студентам предлагается исследовать различные прикладные задачи, в том числе — волновые процессы распространения электромагнитных волн в атмосфере, ионосфере, земной или водной средах (см., например, [1; 3; 22]). В результате такого обучения студенты осваивают не только методы исследования обратных задач, но и пополняют свои знания о волновых процессах как одной из форм движения материи, изучаемых в учебных курсах физики — электродинамике, гидродинамике, акустике, оптике и др. Решая разнообразные обратные задачи для волновых уравнений, студенты формируют знания о волновых процессах как сложных моделях движения реальных систем, состояние которых зависит как от пространственных переменных, так и от времени.

Студенты осознают, что в окружающем мире могут происходить различные диссипативные и дисперсионные процессы, которые могут описываться волновыми уравнениями вида:

$$U_{tt} - c^2 \Delta U = L(U). \qquad (1)$$

В (1) U — компонента электромагнитного поля, зависящая от времени и от пространственных переменных, $U_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} U$, Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным, который, в зависимости от физической постановки задачи, записывается в декартовых или криволинейных координатах, $L(U)$ — некоторый линейный оператор, структура которого зависит от конкретных физических механизмов взаимодействия волн со средой, коэффициент c^2 в зависимости от рассматриваемой геофизической модели является константой или функцией пространственных переменных.

Для наглядности приведем одну из постановок обратных задач для волновых уравнений, входящих в содержание такого обучения [7–8].

Рассматривается процесс возбуждения электромагнитного поля, первоначально отсутствующего, источником стороннего тока вида:

$$\vec{j} = (0,1,0)^T h(x)\delta(z)\theta(t),\ h(x) = \sum_{k=-N}^{N} h_k \exp(ikx),\ h_{(-k)} = \overline{h_k} \qquad (2)$$

в изотропной непроводящей вертикально-неоднородной земной среде.

В (2) T — знак транспонирования, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — тета-функция Хевисайда, $h_{(-k)} = \overline{h_k}$, черта над h_k — знак комплексного сопряжения, h_k, $k = \overline{-N, N}$ — известные постоянные.

От студентов требуется определить диэлектрическую и магнитную проницаемость земной среды по дополнительной информации о второй компоненте вектора напряженности электрического поля как функции времени.

В дальнейшем студентам необходимо проанализировать полученное решение обратной задачи и сделать логические выводы прикладного и гуманитарного характера. В качестве геофизической модели среды требуется применить модель, в которой поверхность Земли считается плоской.

В этой модели физическое пространство R^3 переменных x, y, z плоскостью $z = 0$ делится на два полупространства (воздушное пространство ($z < 0$) – земная среда ($z > 0$)): $R^3_- = \left\{(x, y, z) \in R^3 \middle| z < 0\right\}$, $R^3_+ = \left\{(x, y, z) \in R^3 \middle| z > 0\right\}$. Причем в R^3_- параметры ε, μ, σ — известны и постоянны, а в R^3_+ — гладкие функции точки $(x, y, z) \in R^3_+$ вплоть до границы. На общей границе областей R^3_-, R^3_+ коэффициенты ε, μ, σ терпят скачок конечной длины.

Для формирования математической модели данной обратной задачи студенты выписывают систему уравнений Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} &rot\ \vec{H}(x,y,z,t) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(x,y,z,t) + \sigma\vec{E}(x,y,z,t) + \vec{j}(x,y,z,t),\\ &rot\ \vec{E}(x,y,z,t) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(x,y,z,t),\\ &(x,y,z,t) \in R^3_+ \cup R^3_-,\ t \in R,\ R^3_\pm = \left\{(x,y,z) \in R^3 \middle| \pm z > 0\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

с данными Коши:

$$\vec{E}\Big|_{t<0} \equiv 0,\ \vec{H}\Big|_{t<0} \equiv 0, \vec{j}\Big|_{t<0} \equiv 0, \tag{4}$$

и условиями непрерывности на поверхности разрыва среды:

$$\left[E_x\right]_{z=0} = \left[E_y\right]_{z=0} = \left[H_x\right]_{z=0} = \left[H_y\right]_{z=0} = 0. \tag{5}$$

В равенствах (3), (5) $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$, $\vec{H} = \left(H_x, H_y, H_z\right)$, $\left[U\right]_{z=0} = U^+\Big|_{z=0} - U^-\Big|_{z=0}$, $U^+\Big|_{z=0}$, $U^-\Big|_{z=0}$ — предельные значения функции U, вычисленные в областях $z > 0$ и $z < 0$ соответственно.

В случае источника вида (2), как указывает теория (см., например, [1]):

$$\vec{E} = \vec{E}(x,z,t),\ \vec{H} = \vec{H}(x,z,t) \tag{6}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0. \tag{7}$$

С учетом (6), (7) из системы уравнений Максвелла, выполнив несложные преобразования, студенты получают двумерное волновое уравнение вида (1) относительно второй компоненты вектора напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y - c^2(z)\Delta E_y = L(E_y) + f(x,z,t), \tag{8}$$

где

$$c(z) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)\cdot\mu(z)}},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$L(E_y)=\left(\frac{1}{\varepsilon(z)\cdot\mu^2(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\mu(z)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial z}E_y,$$

$$f(x,z,t)=-\frac{h(x)}{\varepsilon(z)}\cdot\delta(z,t).$$

Учитывая (2), волновое уравнение (8) студенты сводят к ($2N+1$) — одномерным волновым уравнениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_k=c^2(z)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_k-\frac{\mu'(z)}{\varepsilon(z)\cdot\mu^2(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}U_k-\\ -c^2(z)\cdot k^2\cdot U_k-\frac{h_k}{\varepsilon(z)}\cdot\delta(z,t),\ k=\overline{-N,N},\end{gathered}\tag{9}$$

$$f(x,z,t)=-\sum_{k=-N}^{N}h_k\exp(ikx)\frac{1}{\varepsilon(z)}\cdot\delta(z,t).\tag{10}$$

Наконец, выписав дополнительную информацию о второй компоненте вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{gathered}E_y(0,0,t)=f_1(t),\ \frac{\partial}{\partial x}E_y(0,0,t)=f_2(t),\\ t>0,\ f_i(t)\in C^2(0,T),\ i=1,2,\end{gathered}\tag{11}$$

студенты завершают построение математической модели обратной задачи в виде (9)–(11).

В дальнейшем, применяя методы исследования подобных обратных задач, студенты доказывают локальную разрешимость обратной задачи (9)–(11). Сформулируем полученные теоремы для обратной задачи (9)–(11).

Определение 1. Решением обратной задачи (9)–(11) называются функции $\varepsilon^+(z)$, $\mu^+(z)$, $z>0$, такие, что решение прямой задачи (9), (10), отвечающее этим функциям, удовлетворяет (11).

Теорема 1. Пусть для функций $f_i(t)\in C^2(0,T),\ i=1,2,\ h(x)$ выполнены соотношения:

$$h(0)\neq 0,\ h(0)h'''(0)-h'(0)h''(0)\neq 0,\tag{12}$$

$$f_1(+0)\neq 0,\ sign\left(f_1(+0)\right)=-sign\left(h(0)\right),\ f_2(+0)=\frac{h'(0)f_1(+0)}{h(0)},\tag{13}$$

$$\frac{1}{f_1(+0)}\frac{d}{dt}f_1(+0)=\frac{1}{f_2(+0)}\frac{d}{dt}f_2(+0).\tag{14}$$

Тогда для достаточно малого $T>0$ существует непрерывное решение обратной задачи (9)–(11).

Пусть m, M, T — фиксированные положительные числа, $m\leq M$, $L=\dfrac{T}{2m}$, $Q\,(m, M)$ — множество пар $\left(\varepsilon^+(z),\mu^+(z)\right)$ функций из класса $\Lambda(m,M,L)$,

$$\Lambda(m,M,L)=\left\{a(z)\in C^2\left[0,L\right]\middle|\|a\|_{C^2[0,L]}\le M,\ a(z)\ge m\right\}.$$

Теорема 2. Пусть паре $\left(\varepsilon^+(z),\mu^+(z)\right)\in Q(m,M)$ соответствует информация (11), а паре $\left(\overline{\varepsilon}^+(z),\overline{\mu}^+(z)\right)\in Q(m,M)$ — информация (11) с функциями $\overline{f}_1(t),\overline{f}_2(t)$. Тогда при условиях (12)–(14) для каждого $T>0$ существует положительная постоянная C, что

$$\max\left(\left\|\varepsilon^+(z)-\overline{\varepsilon}^+(z)\right\|_{C[0,L]},\ \left\|\mu^+(z)-\overline{\mu}^+(z)\right\|_{C[0,L]}\right)\le C\sum_{i=1}^{2}\left\|f_i(t)-f_i'(t)\right\|_{C^2[0,T]}.$$

Приведенный пример наглядно демонстрирует реализацию прикладной направленности, реализацию межпредметных связей в процессе обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений, что способствует формированию у студентов фундаментальных знаний по различным дисциплинам естествознания. Студенты в процессе решения данной обратной задачи доказывают корректность математической модели обратной задачи и анализируют проблемные ситуации в реализации математического метода решения обратной задачи. Они применяют фундаментальные знания из многих предметных областей для решения конкретной прикладной задачи, грамотно объясняют и обосновывают практические выводы прикладного и гуманитарного характера полученного решения обратной задачи. Очевидно, что в данном случае студенты демонстрируют компетентность в области прикладной математики.

Литература

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 502 с.
2. *Бухгейм А.Л.* Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. 181 с.
3. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1988. 176 с.
4. *Гутер Р.С., Янпольский А.Р.* Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. 246 с.
5. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1994. 207 с.
6. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. 2-е изд. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009. 458 с.
7. *Корнилов В.С.* Условная устойчивость одномерной обратной задачи об одновременном определении двух коэффициентов, входящих в гиперболическое уравнение // Методы решения условно-корректных задач: сб. науч. тр. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1991. С. 102–122.
8. *Корнилов В.С.* Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учеб. пособие. М.: МГПУ, 2005. 359 с.
9. *Корнилов В.С.* Вузовская подготовка специалистов по прикладной математике — история и современность // Наука и школа. 2006. № 4. С. 10–12.

10. *Корнилов В.С.* Гуманитарные аспекты вузовской системы прикладной математической подготовки // Наука и школа. 2007. № 5. С. 23–28.

11. *Корнилов В.С.* Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации высшего математического образования: дис. ... д-ра пед. наук. М., 2008. 481 с.

12. *Корнилов В.С.* История развития теории обратных задач для дифференциальных уравнений — составляющая гуманитарного потенциала обучения прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2009. № 1 (17). С. 108–113.

13. *Корнилов В.С.* Теоретические основы информатизации прикладного математического образования: монография. Воронеж: Научная книга, 2011. 140 с.

14. *Корнилов В.С.* Психологические аспекты обучения студентов вузов фрактальным множествам // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2011. № 4. С. 79–82.

15. *Корнилов В.С.* Лабораторные занятия как форма организации обучения студентов фрактальным множествам // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2012. № 1 (23). С. 60–63.

16. *Корнилов В.С.* Обратные задачи в учебных дисциплинах прикладной математики // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2014. № 1 (27). С. 60–68.

17. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. 359 с.

18. *Левченко И.В., Корнилов В.С., Беликов В.В.* Роль информатики в подготовке специалистов по прикладной математике // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2009. № 2 (18). С. 108–112.

19. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1959. 232 с.

20. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

21. Современные проблемы прикладной математики: сб. научно-популяр. ст. / Под ред. А.А. Петрова. Вып. 1. М.: МЗ Пресс, 2005. 231 с.

22. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.

Literatura

1. *Brexovskix L.M.* Volny’ v sloisty’x sredax. M.: AN SSSR, 1957. 502 s.

2. *Buxgejm A.L.* Vvedenie v teoriyu obratny’x zadach. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1988. 181 s.

3. *Gabov S.A.* Vvedenie v teoriyu nelinejny’x voln. M.: MGU im. M.V. Lomonosova, 1988. 176 s.

4. *Guter R.S., Yanpol’skij A.R.* Differencial’ny’e uravneniya. M.: FIZMATGIZ, 1962. 246 s.

5. *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriyu obratny’x zadach: ucheb. posobie. M.: Izd-vo MGU im. M.V. Lomonosova, 1994. 207 s.

6. *Kabanixin S.I.* Obratny'e i nekorrektny'e zadachi: uchebnik dlya studentov vuzov. 2-e izd. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2009. 458 c.

7. *Kornilov V.S.* Uslovnaya ustojchivost' odnomernoj obratnoj zadachi ob odnovremennom opredelenii dvux koe'fficientov, vxodyashhix v giperbolicheskoe uravnenie // Metody' resheniya uslovno-korrektny'x zadach: sb. nauch. tr. Novosibirsk: IM SO AN SSSR, 1991. C. 102–122.

8. *Kornilov V.S.* Nekotory'e obratny'e zadachi identifikacii parametrov matematicheskix modelej: ucheb. posobie. M.: MGPU, 2005. 359 s.

9. *Kornilov V.S.* Vuzovskaya podgotovka specialistov po prikladnoj matematike — istoriya i sovremennost' // Nauka i shkola. 2006. № 4. S. 10–12.

10. *Kornilov V.S.* Gumanitarny'e aspekty' vuzovskoj sistemy' prikladnoj matematicheskoj podgotovki // Nauka i shkola. 2007. № 5. S. 23–28.

11. *Kornilov V.S.* Teoreticheskie i metodicheskie osnovy' obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij v usloviyax gumanitarizacii vy'sshego matematicheskogo obrazovaniya: dis. ... d-ra ped. nauk. M., 2008. 481 s.

12. *Kornilov V.S.* Istoriya razvitiya teorii obratny'x zadach dlya differencial'ny'x uravnenij — sostavlyayushhaya gumanitarnogo potenciala obucheniya prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2009. № 1 (17). S. 108–113.

13. *Kornilov V.S.* Teoreticheskie osnovy' informatizacii prikladnogo matematicheskogo obrazovaniya: monografiya. Voronezh: Nauchnaya kniga, 2011. 140 s.

14. *Kornilov V.S.* Psixologicheskie aspekty' obucheniya studentov vuzov fraktal'ny'm mnozhestvam // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby' narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2011. № 4. S. 79–82.

15. *Kornilov V.S.* Laboratorny'e zanyatiya kak forma organizacii obucheniya studentov fraktal'ny'm mnozhestvam // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2012. № 1 (23). S. 60–63.

16. *Kornilov V.S.* Obratny'e zadachi v uchebny'x disciplinax prikladnoj matematiki // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2014. № 1 (27). S. 60–68.

17. *Lebedev N.N.* Special'ny'e funkcii i ix prilozheniya. M.: FIZMATGIZ, 1963. 359 s.

18. *Levchenko I.V., Kornilov V.S., Belikov V.V.* Rol' informatiki v podgotovke specialistov po prikladnoj matematike // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2009. № 2 (18). S. 108–112.

19. *Mixlin S.G.* Lekcii po linejny'm integral'ny'm uravneniyam. M.: FIZMATGIZ, 1959. 232 s.

20. *Romanov V.G.* Obratny'e zadachi matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1984. 264 s.

21. Sovremenny'e problemy' prikladnoj matematiki: sb. nauchno-populyar. st. / Pod red. A.A. Petrova. Vyp. 1. M.: MZ Press, 2005. 231 s.

22. *Uizem Dzh.* Linejny'e i nelinejny'e volny': per. s angl. M.: Mir, 1977. 622 s.

V.S. Kornilov

Realization of an Applied Direction of Teaching Students the Inverse Problems for Differential Equations

The article draws attention to the training of professionals in the field of applied mathematics. The author considers the applied nature of teaching students of physical and mathematical specialties of higher education inverse problems for differential equations, the theory of which is one of the directions of modern applied mathematics. The author provides a formulation of the inverse problem for Maxwell's equations, which became the content of such training, scheme of its solution with the formulation of appropriate outcome theorems. He makes conclusions about the formation at the students competence in the field of applied mathematics as a result of teaching inverse problems for differential equations.

Keywords: teaching inverse problems for differential equations; Applied Mathematics; applied direction of teaching; student.