

Г.Д. Гефан

Оптимальный алгоритм рейтинговой оценки студенческих команд при проведении состязаний по математическим дисциплинам в ходе учебного процесса

Предлагается проведение математических боев в качестве метода обсуждения и контроля выполнения домашних заданий. Важный принцип, состоящий в том, что команды-участницы боя не известны заранее, вызывает необходимость особой системы подсчета рейтингов. Предложен и описан специальный метод определения рейтингов, основанный на решении задачи математического программирования.

Ключевые слова: учебная мотивация; домашнее задание; математический бой; рейтинг; оптимальный алгоритм.

В «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» (декабрь, 2013) особо отмечена «низкая учебная мотивация школьников и студентов», связанная, в частности, с «перегруженностью... оценочных и методических материалов техническими элементами и устаревшим содержанием». В очень высокой степени мотивация студентов и способы контроля их знаний влияют на самостоятельную работу, которая является одной из важнейших составляющих современного педагогического процесса в вузе [3: с. 94].

С этой точки зрения традиционный способ проверки и обсуждения домашних заданий по математическим дисциплинам (выборочный опрос) далеко не совершенен. Для значительной части студентов любая нестандартность задачи является непреодолимой преградой (действительной или мнимой). Обычно лишь меньшинство проявляет постоянную познавательную активность, стремится решить все задачи, в особенности интересные и нестандартные. Между тем именно такие задачи развивают логические способности человека.

В данной работе в качестве альтернативной формы проверки и обсуждения домашних заданий предложено использование так называемых математических боев. Математический бой придуман в 1960-е годы ленинградским учителем И.Я. Веребейчиком и применяется, как правило, в работе с талантливыми школьниками, хотя есть и опыт организации студенческих математических боев [4]. Однако нам неизвестно об опыте использования математических боев собственно в учебном процессе (в вузе). Мы не ставим перед собой задачу

буквального следования оригинальным правилам математического боя, считая, что они вполне могут быть адаптированы к условиям учебного процесса в вузе. Эти модифицированные правила выглядят следующим образом.

1. Математический бой — это командное состязание. Оптимальное число команд в студенческой группе — 4, по 5–6 игроков в каждой команде. Принцип формирования команд — добровольный, но капитанов команд лучше назначить преподавателю из числа наиболее инициативных и способных студентов. Капитаны — это «центры кристаллизации», вокруг которых формируются команды, достаточно равные между собой по силам. Команды являются постоянными коллективами студентов, причем в завершающей части изучения дисциплины от математических боев они могут перейти к другой форме состязаний — деловым играм.

2. Основой для боя является обсуждение домашнего задания, полученного на предыдущем занятии. Обычно это задание содержит 4–6 задач. Каждая из команд работает над заданием коллективно и изолированно от соперников: никто не заинтересован в обмене информацией с конкурентами.

3. На занятии проходит бой между двумя командами (в дальнейшем — «А» и «В»), однако между какими именно — заранее неизвестно. Это определяется в начале занятия преподавателем или жребием. Такой принцип стимулирует каждую команду не расслабляться, быть всегда готовой к бою.

4. Каждый математический бой состоит из двух раундов. В 1-м раунде команда «А» называет одну из задач домашнего задания и просит соперников привести свое решение. Команда «В» в своем выступлении ничем не ограничена: она может представить любой анализ задачи, в том числе привести несколько вариантов решения. После заслушивания команды «В» команда «А» оценивает выступление соперников, приводит свой вариант решения или важные комментарии и дополнения к решению соперников. В дальнейшей дискуссии выступления команд обсуждаются и оцениваются (в этом принимают участие и члены тех команд, которые в данном случае не состязаются; в спорных случаях окончательную ясность вносит преподаватель). При этом возникает одна из следующих ситуаций.

- Ситуация «Удачный ход». Команда «В» не имеет решения или приводит неверное решение. Команда «А» приводит верное решение. В этом случае раунд заканчивается победой команды «А».

- Ситуация «Неудачный ход». Команда «В» приводит верное решение. Команде «А» либо нечего к нему добавить, либо она приводит иное решение, но неверное. В этом случае раунд заканчивается победой команды «В».

- Ситуация «Боевая ничья». Команда «В» приводит верное решение. Команда «А» в ответ приводит свой вариант решения, также верный, либо вносит существенные, значимые дополнения или комментарии к решению соперников. В этом случае раунд завершается вничью.

- Ситуация «Грустная ничья». Команда «В» не имеет решения или приводит неверное решение. Но и команда «А» не имеет верного решения. В этом

случае раунд заканчивается вничью, но в дальнейшем обе команды могут получить предупреждение за плохую подготовку к бою (см. ниже).

Во 2-м раунде команды меняются ролями.

Если оба раунда выиграет одна из команд, то она выигрывает бой с преимуществом в 2 балла. Если один раунд завершится вничью, а другой будет выигран одной из команд, то она выигрывает бой с преимуществом в 1 балл. Если команды выиграют по одному раунду, либо оба раунда закончатся вничью, то результат боя — ничья. Однако если при этом в обоих раундах возникла ситуация «Грустная ничья», то обе команды получают предупреждение за плохую подготовку к бою.

Эффективность проведения математических боев по описанным правилам для активизации познавательной деятельности студентов очевидна. По сравнению с традиционным выборочным опросом организация математических боев изменяет ситуацию кардинально. Это связано со следующими причинами.

1. Действуя в команде, студенты учатся друг у друга, слабые подтягиваются к сильным. Для того чтобы выровнять вклад всех членов команды, преподаватель может дать себе право самому определять, кто из участников будет представлять команду в данном раунде.

2. Команды не заинтересованы в том, чтобы инициировать рассмотрение самых простых, незамысловатых задач. Правила боя таковы, что такая тактика, скорее всего, приведет команду к ситуации «Неудачный ход». Для того чтобы выиграть раунд («Удачный ход») или хотя бы свести его вничью, необходимо инициировать рассмотрение такой задачи, в которой есть простор для рассуждений, где возможны разные подходы, разные способы решения.

3. Команда может стать участницей боя на любом занятии и потому должна быть всегда готова к обсуждению домашнего задания. В этом случае никто не рассчитывает на разовый успешный выход к доске как залог того, что его теперь «долго не спросят».

4. Наконец, математический бой как динамичное состязательное мероприятие характеризуется высокой ответственностью и эмоциональным подъемом участников. Равнодушных здесь нет.

Итак, математический бой как форма проверки и обсуждения домашних заданий имеет ряд очевидных преимуществ, обусловленных коллективным способом работы и эмоциональным подъемом. Мы считаем также очень важным и эффективным предложенный нами принцип: команды-участницы определяются в начале занятия преподавателем или жребием. Этот принцип стимулирует необходимость в постоянной подготовке к занятиям каждой команды и каждого отдельного игрока.

Однако такой способ организации математических боев, вносящий в их проведение некий элемент стохастичности, требует особого метода учета результатов каждой из команд. Дело в том, что если участники каждого боя определяются случайным или произвольным образом, то к концу изучения

дисциплины, при подведении итогов, у команд будет разное количество боев и разный состав соперников (в отличие от так называемого кругового турнира, в котором каждая команда сыграла бы с каждой). Следовательно, необходимо не просто арифметический подсчет набранных командами баллов, а такая система определения рейтинга каждой команды, которая адекватно отразила бы все имеющиеся результаты.

В качестве такой системы мы разработали следующий алгоритм. Пусть в студенческой группе сформировано n команд. (Оптимальное число команд в студенческой группе $n - 4$.) Бой состоит из двух раундов. Как было сказано, бой может закончиться с преимуществом одной из команд в 2 балла, в 1 балл или вничью (0 баллов). Каждой команде присваивается номер $k = \overline{1, n}$. По завершении боя между командами с номерами i и j ($i < j$) его результат описывается величиной x_{ij} , которая может принять следующие значения: 2, 1, 0, -1, -2. Рейтинги команд будут описываться величинами y_k ($k = \overline{1, n}$). Принцип их определения: рейтинги команд должны максимально соответствовать результатам всех боев между командами.

Как реализовать этот принцип? Минимизируется целевая функция:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left[m_{ij}(y_i - y_j) - \sum_{l=1}^{m_{ij}} x_{ij}^{(l)} \right]^2.$$

Здесь подразумевается, что между командами i и j ($i < j$) состоялось m_{ij} боев (эта величина может быть и нулевой), l — номер боя между этими командами, $x_{ij}^{(l)}$ — результат этого боя. Если между командами i и j ($i < j$) боев не было, то $m_{ij} = 0$, и величина в квадратных скобках обращается в нуль. Если состоялся один бой, то величина в квадратных скобках равна отклонению разности рейтингов команд от результата этого боя. Если же между командами i и j ($i < j$) состоялось более одного боя, то результаты этих боев суммируются, а разность рейтингов команд получает весовой множитель m_{ij} . Рейтинги команд нормируются согласно условию $\sum_{k=1}^n y_k = n$, т. е. средний рейтинг составит 1. Таким образом, для определения рейтингов команд по результатам боев необходимо решить задачу нелинейного программирования:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left[m_{ij}(y_i - y_j) - \sum_{l=1}^{m_{ij}} x_{ij}^{(l)} \right]^2 \rightarrow \min, \quad \sum_{k=1}^n y_k = n, \quad y_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}$$

с n переменными y_k , $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим пример. Между четырьмя командами состоялось 10 боев (табл. 1). Далее можно сформировать таблицу 2, показывающую, сколько боев состоялось между разными командами (m_{ij}). Так, больше всего боев (3) состоялось между командами 1 и 3, меньше всего боев (ни одного) — между командами 3 и 4.

Таблица 1

Результаты состоявшихся боев команд

Общий номер боя	Первый участник (i)	Второй участник (j)	Номер боя между данными командами (l)	Результат боя $x_{ij}^{(l)}$
1	1	3	1	$x_{13}^{(1)} = -1$
2	2	3	1	$x_{23}^{(1)} = 1$
3	1	2	1	$x_{12}^{(1)} = 0$
4	1	4	1	$x_{14}^{(1)} = -1$
5	2	3	2	$x_{23}^{(2)} = -2$
6	2	4	1	$x_{24}^{(1)} = 1$
7	1	3	2	$x_{13}^{(2)} = -2$
8	2	4	2	$x_{24}^{(2)} = 1$
9	1	4	2	$x_{14}^{(2)} = 2$
10	1	3	3	$x_{13}^{(3)} = -1$

Таблица 2

Состоявшиеся бои между разными командами (m_{ij})

i	j			
	1	2	3	4
1		1	3	2
2	–		2	2
3	–	–		0
4	–	–	–	

Учет информации о результатах боев и расчет рейтингов команд очень легко реализовать в табличном процессоре Excel с помощью надстройки «Поиск решения» (рис. 1). В верхней части листа воспроизводится таблица 2 значений m_{ij} . В средней части листа вводится информация о результатах боев. Так, например, между командами 1 и 2 состоялся 1 бой, закончившийся вничью ($x_{12}^{(1)} = 0$). Поэтому в ячейку D9 введено число 0. Между командами 1 и 3 состоялось 3 боя ($x_{13}^{(1)} = -1$, $x_{13}^{(2)} = -2$, $x_{13}^{(3)} = -1$). Поэтому в ячейку E9 введена формула = -1 -2 -1, и суммарный результат в этой ячейке оказался равным -4. Между командами 3 и 4 боев не было, и поэтому ячейка F11 оставлена пустой и т. д.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			1	2	3	4			
2	Количество	1		1	3	2			
3	боев	2			2	2			
4	между	3				0			
5	командами	4							
6									
7									
8			1	2	3	4			
9		1		0	-4	1	0,6592		
10	Результаты	2			-1	2	1,2325		
11	боев	3					1,9125		
12		4					0,1958		
13			0,6592	1,2325	1,9125	0,1958	4		
14			y1	y2	y3	y4			
15									
16			1	2	3	4			
17	Минимизация	1		0,3287	0,0576	0,0054			
18	суммы	2			0,1296	0,0054			
19	квадратов	3				0,0000			
20	отклонений	4							
21									
22			0	0,3287	0,1872	0,0108	0,5267		
23									
24									
25									

Рис. 1. Учет информации о результатах боев и расчет рейтингов команд

Диапазон G9:G12 — так называемые изменяемые ячейки, в которых отображаются значения переменных задачи (рейтинги команд), ячейки C13:F13 — их копии. В ячейке G13 переменные суммируются.

В нижней части листа реализовано вычисление целевой функции. Например, в ячейку D17 введена формула $= (D2 * (\$G9 - D\$13) - D9)^2$, вычисляющая

$$\text{величину} \left[m_{12} (y_1 - y_2) - \sum_{l=1}^{m_{12}} x_{ij}^{(l)} \right]^2.$$

Знаки \$ нужны для последующего автозаполнения. Значение целевой функции в результате суммирования вычисляется в ячейке G22. Обращаясь к «Поиску решения», необходимо выбрать целевую ячейку (G22), направление оптимизации (задача на минимум), изменяемые ячейки (G9:G12), ограничение (G13 = 4), задать неотрицательность переменных и указать на нелинейность задачи.

Итак, в рассматриваемом нами примере итоговые рейтинги команд оказались следующими: $y_1 = 0,6592$, $y_2 = 1,2325$, $y_3 = 1,9125$, $y_4 = 0,1958$. Обращаем внимание на то, что если бы мы просто вычислили баллы, набранные командами, то оказалось бы, что у команд 1 и 4 — одинаковое число баллов (-3). Однако рейтинг команды 1 заметно выше, чем у команды 4. Очевидно, так получилось потому, что команда 1 понесла большой урон в боях с самой сильной

командой 3, тогда как в очных встречах с командой 4 она имеет преимущество. Команда 4 с командой 3 не встречалась.

Отметим, что описанный алгоритм может быть реализован самими студентами в рамках лабораторных компьютерных практикумов, сопровождающих изучение теории вероятностей, математической статистики, методов теории игр и теории оптимальных решений ([1; 2]).

Выводы. Традиционным методом проверки и обсуждения домашних заданий является выборочный опрос — малоэффективное мероприятие, которое слабо стимулирует большинство студентов к постоянной активной работе. В качестве альтернативы мы предлагаем проведение (на материале домашних заданий) математических боев между несколькими сформированными командами. Эта форма занятия направлена на повышение мотивации, ответственности, познавательной активности и логической культуры студентов. Важный принцип, состоящий в том, что команды-участницы боя не известны заранее, вызывает необходимость особой системы подсчета рейтингов команд. Предложен и описан специальный метод определения рейтингов команд по результатам математических боев, основанный на решении задачи математического программирования.

Литература

1. *Гефан Г.Д.* Компьютерное моделирование и экспериментирование — современный подход к обучению вероятностно-статистическим дисциплинам в техническом вузе // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.* 2013. № 3 (39). С. 172–177.

2. *Гефан Г.Д., Кузьмин О.В.* Активное применение компьютерных технологий в преподавании вероятностно-статистических дисциплин в техническом вузе // *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева.* 2014. № 1 (27). С. 57–61.

3. *Кузьмин О.В., Палева О.В.* Повышение качества математической подготовки посредством организации самостоятельной работы студентов // *Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования».* 2008. № 15. С. 94–97.

4. *Мерлина Н.И., Петрова М.В.* Студенческие математические бои в Чувашии // *Математика в высшем образовании.* 2009. № 7. С. 121–132.

Literatura

1. *Gefan G.D.* Komp'yuternoe modelirovanie i e'ksperimentirovanie — sovremenny'j podxod k obucheniyu veroyatnostno-statisticheskim disciplinam v texnicheskom vuze // *Sovremenny'e texnologii. Sistemny'j analiz. Modelirovanie.* 2013. № 3 (39). S. 172–177.

2. *Gefan G.D., Kuz'min O.V.* Aktivnoe primenenie komp'yuterny'x texnologij v prepodavanii veroyatnostno-statisticheskix disciplin v texnicheskom vuze // *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.P. Astaf'eva.* 2014. № 1 (27). S. 57–61.

3. *Kuz'min O.V., Paleeva O.V.* Povy'shenie kachestva matematicheskoy podgotovki posredstvom organizacii samostoyatel'noj raboty' studentov // *Vestnik Moskovskogo*

gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2008. № 15. S. 94–97.

4. *Merlina N.I., Petrova M.V.* Studencheskie matematicheskie boi v Chuvashii // Matematika v vy'sshem obrazovanii. 2009. № 7. S. 121–132.

G.D. Gefan

**Optimal Algorithm of Rating Assessment of Student Teams
during Contests in Mathematic Disciplines during the Educational Process**

The author proposes to conduct mathematical battles as a method of discussing and monitoring of doing homework. An important principle which consists in the fact that the teams participating in a battle are not known in advance, necessitates a special system of rating calculation. A special method for determining ratings, based on the solution of the problem of mathematical programming is proposed and described.

Keywords: learning motivation; homework; Mathematics battle; rating; optimal algorithm.