УДК 378.014.15+517.9

**В.С. Корнилов**

# Методические подходы к структурированию содержания обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений

В статье излагаются научно-методические аспекты формирования содержания специальных учебных курсов, посвященных обратным задачам для дифференциальных уравнений и адресованных студентам высших учебных заведений физико-математических и естественнонаучных направлений подготовки. Для наглядности приводятся постановки учебных обратных задач для гиперболических уравнений с изложением математических методов их решения.

*Ключевые слова:* обратные задачи для дифференциальных уравнений; методы математической физики; структурирование содержания обучения; студент.

Учебный материал, используемый в процессе изложения теории и методологии обратных задач для дифференциальных уравнений, включает сложные математические модели, которыми описываются разнообразные физические процессы и явления. Материал в большей степени рассчитан на студентов вузов, обучающихся на физико-математических или естественнонаучных направлениях подготовки. Поэтому при разработке такого содержания обучения должна учитываться профессиональная направленность подготовки студентов (см., например, [2; 3; 5–7; 12; 14–17; 20; 21]). Обратные задачи для дифференциальных уравнений обладают математическими особенностями (нелинейность, неединственность, некорректность), принадлежат к различным типам (коэффициентные, граничные, геометрические, эволюционные и другие типы). Кроме того, обратные задачи для дифференциальных уравнений индивидуальны, так как искомые функции (коэффициенты дифференциальных уравнений, правые части дифференциальных уравнений, начальные или граничные условия и др.) могут являться функциями как одномерными, так и многомерными; источник, инициирующий изучаемый физический процесс, может моделироваться различными специальными функциями, в том числе обобщенными функциями (например, дельта-функцией Дирака и др.) (см., например, [2; 3; 7; 20; 21]). В связи с чем при разработке учебного материала целесообразно использовать критерии единства учебного материала, научности, системности, наглядности, дидактической значимости, методологической значимости и другие критерии (см., например, [8; 19; 22]).

В процессе преподавания излагаются методы решения разнообразных учебных обратных задач, таких как **о**братные задачи вычисления неизвестных коэффициентов, правых частей линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; одномерные и многомерные обратные задачи вычисления коэффициентов, правых частей **дифференциальных уравнений в частных производных** гиперболических, параболических, эллиптических и других типов дифференциальных уравнений; численные **методы поиска решений обратных задач**.

На семинарских занятиях студенты, осваивая теорию обратных задач, решают различные учебные задачи и задания, например, конструируют интегральное уравнение, которому удовлетворяет решение прямой задачи; доказывают теоремы корректности обратной задачи; поясняют идею поиска приближенного решения обратной задачи; выписывают разностный аналог обратной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения или дифференциального уравнения в частных производных; конструируют вычислительный алгоритм, при помощи которого может быть найдено приближенное решение обратной задачи, проводят анализ его свойств (сходимость, устойчивость и другие свойства), решают и другие учебные задачи и задания. В качестве учебного задания студентам может быть предложено пояснить идею доказательства корректности или условной корректности обратной задачи или, например, по найденному решению обратной задачи сформулировать логические выводы прикладного или гуманитарного характера (см., например, [4; 5; 9–11; 13; 18]).

На лабораторных занятиях студенты учатся находить приближенные решения обратных задач для дифференциальных уравнений при помощи компьютерных технологий, среди которых системы компьютерной математики Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, обладающие разнообразными возможностями, в том числе возможностями визуализации полученных решений.

Остановимся на одном из разделов содержания обучения, посвященного обратным задачам для гиперболических уравнений.

Целесообразно студентов познакомить в первую очередь с несложной учебной обратной задачей для гиперболического уравнения. При этом желательно пояснить и изложить этапы ее исследования и подробно изложить математический метод ее решения. И в дальнейшем изложении учебного материала рассматривать уже более сложные обратные задачи, решение которых базируется на ранее изложенном математическом методе. Важно донести до сведения студентов тот факт, что при рассмотрении обратных задач в обобщенных постановках (наличие в постановке обратной задачи импульсных источников, смоделированных обобщенными функциями) важно стремиться выделить у решения соответствующей прямой задачи сингулярную часть и в дальнейшем исследовать соответствующую обратную задачу, построенную для ее регулярной части.

В качестве примера приведем несколько постановок обратных задач для таких дифференциальных уравнений, вошедших в содержание обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений, решение которых базируется на использовании общего подхода и на использовании одного математического метода.

Обратная задача 1 [7]. В области $x \geq 0$ вычислить неизвестный коэффициент $a\,(x)$ дифференциального уравнения гиперболического типа

$$U_{tt} = a(x)U_{xx},\ U = U(x,t),\ a(x) > 0,\ x > 0, \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях

$$U\big|_{t<0} \equiv 0,\ U_x\big|_{x=0} = \alpha \cdot \delta(t)\ \ (t > 0), \tag{2}$$

и дополнительной информации о решении прямой задачи (1), (2) вида

$$U(0,t) = f(t),\ t > 0. \tag{3}$$

В (3) $\alpha$ — константа, $\delta\,(t)$ — дельта-функция Дирака.

Для наглядности, вкратце изложим математический метод ее решения. С помощью замены переменной

$$y = \tau(x),\ \tau(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a(\xi)}}$$

и несложных математических преобразований, прямая задача (1), (2) может быть сведена к задаче вида

$$V_{tt} = V_{yy} + g(y)V,\ y > 0,\ t \in R, \tag{4}$$

$$V\big|_{t<0} \equiv 0,\ \left(S'(y)V + V_y\right)\Big|_{y=0} = \sqrt{a(0)} \cdot \alpha \cdot \delta(t), \tag{5}$$

где $V(y,t) = \dfrac{U(\tau^{-1}(y),\ t)}{S(y)},\ \ S(y) = \sqrt[4]{\dfrac{a(\tau^{-1}(y))}{a(+0)}},\ \ g(y) = \left(\dfrac{S'(y)}{S(y)}\right)_y^{/} - \left(\dfrac{S'(y)}{S(y)}\right)^2.$

Если выделить у функции $V\,(y,\,t)$ сингулярную часть

$$V(y,t) = \lambda(y)\theta(t-y) + V^*(y,t),$$

где $\lambda(y) = -\alpha \cdot \sqrt{a(0)}$, а $V^*(y,t)$ является непрерывной функцией при переходе через поверхность $t = y$, то относительно регулярной функции $V^*(y,t)$, которая совпадает с функцией $V(y, t)$ в случае, когда $t > y > 0$ можно получить задачу

$$V_{tt} = V_{yy} + g(y)V, (y,t) \in D, \ D = \{(y,t) \,|\, t > y > 0\}, \tag{6}$$

$$V(y,y) = \gamma, \left(S'(y)V + V_y\right)\big|_{y=0} = 0. \tag{7}$$

Применяя метод, разработанный В.Г. Романовым (см., например, [7; 20]), можно построить интегральное уравнение относительно функции $V(y, t)$:

$$\begin{aligned} V(y,t) &= \gamma \cdot \exp\left(S'(+0)(t-y)\right) + \\ &+ S'(+0)\int_0^{t-y} d\varsigma \int_0^{\varsigma} \exp\left(S'(+0)(\varsigma-\xi)\right) d\xi \int_0^{\xi/2} g(\eta)V(\eta,\varsigma-\eta)\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t-y} d\varsigma \int_0^{\varsigma/2} g(\eta)V(\eta,\varsigma-\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\int_0^{t-y} d\varsigma \int_0^{y} g(\eta)V(\eta,\varsigma+\eta)\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t-y} d\varsigma \int_y^{y+\varsigma/2} g(\eta)V(\eta,\varsigma+2y-\eta)\,d\eta \end{aligned} \tag{8}$$

и в дальнейшем доказать, что когда заданная функция $g(y)$ из (6) является непрерывной функцией, решение интегрального уравнения (8) существует и имеет место оценка: $\| V \|_{C(G(T))} \le \text{const}$.

В дальнейшем, применяя стандартный метод (см., например, [7; 20]), можно получить интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $g(y)$, как коэффициента уравнения (6):

$$g\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\gamma}\cdot\left(f''(t) - S'(+0)\,f'(t)\right) - \frac{1}{\gamma}\int_0^{t/2} g(\xi)W(\xi,t-\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

В (9), функция $W(y, t)$, которой обозначена функция $V_t(y, t)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} W(y,t) &= \frac{1}{2}r_1 \cdot V(+0,t-y) + \frac{1}{2}\int_0^{y} g^+(\eta)V(\eta,t-y+\eta)\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}r_2 \int_0^{(t-y)/2} g^+(\eta)V(\eta,t-y-\eta)\,d\eta + \\ &+ \frac{1}{2}\int_y^{(t+y)/2} g^+(\eta)V(\eta,t+y-\eta)\,d\eta, \ (y,t) \in G_T^+. \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что дополнительная информация о решении прямой задачи (1), (2) в терминах функции $V(y, t)$ принимает вид:

$$V(+0,t)=\left.\frac{U(\tau^{-1}(y),\,t)}{S(y)}\right|_{y=+0}=U(+0,t)=f(t). \qquad (11)$$

Опуская громоздкие математические выкладки, сформулируем основные теоремы.

**Теорема 1.** Если $f(t)\in C^2(0,T)$ и справедливы соотношения $S'(+0)=\dfrac{f'(+0)}{f(+0)}$, $a(+0)=\dfrac{f^2(+0)}{\alpha^2}$, $f(+0)=\gamma$, $f(+0)\neq 0$, $\operatorname{sgn}(f(+0))=-\operatorname{sgn}(\alpha)$, то для малых значений $T>0$ решение обратной задачи (6), (7), (11) в классе $C\left[0,\dfrac{T}{2}\right]$ существует и единственно.

**Теорема 2.** Пусть $f(t)\in C^2(0,T)$ и справедливы соотношения $S'(+0)=\dfrac{f'(+0)}{f(+0)}$, $a(+0)=\dfrac{f^2(+0)}{\alpha^2}$, $f(+0)=\gamma$, $f(+0)\neq 0$, $\operatorname{sgn}(f(+0))=-\operatorname{sgn}(\alpha)$; $g(y)\in C\left[0,\dfrac{T}{2}\right]$ и является решением обратной задачи (6), (7), (11). Тогда для малых значений $T>0$ существует решение обратной задачи (1)–(3) $a(x)$ из класса $\Lambda=\{a(x)\in C[0,z]\,|\,a(x)>0\}$, $z=\tau^{-1}\left(\dfrac{T}{2}\right)=\sqrt{a(+0)}\displaystyle\int_0^{T/2}S^2(\xi)\,d\xi$.

Пусть $m$, $M$, $T$ — фиксированные числа больше нуля, $m\le M$, $k=\dfrac{T}{2\sqrt{m}}$, $Q\left(m,M,\sqrt{a(+0)}\right)$ — множество функций $a$ из класса $\Lambda_1(m,M,k)=\left\{a(x)\in C^2[0,k]\,\middle|\,\|a\|_{C^2[0,k]}\le M,\ a(x)\ge m\right\}$. Тогда для этих условий можно доказать следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть функции $a\in Q\left(m,M,\sqrt{a(+0)}\right)$ соответствует информация (3) с функцией $f(t)\in C^2(0,T)$, а функции $\bar a\in Q\left(m,M,\sqrt{a(+0)}\right)$ — информация (3) с функцией $\bar f(t)\in C^2(0,T)$. Тогда $\forall T>0\ \ \exists n>0$:

$$\|a(x)-\bar a(x)\|_{C[0,L]}\le n\cdot\left\|f(t)-\bar f(t)\right\|_{C^2[0,T]}.$$

Логическим продолжением изложения студентам темы по обратным задачам для гиперболических уравнений является обратная задача, являющаяся обобщением обратной задачи (1)–(3). Сформулируем ее.

**Обратная задача 2** [7]. В области $x\in R$ вычислить неизвестный коэффициент $a(x)$ дифференциального уравнения гиперболического типа

$$U_{tt} = a(x)\, U_{xx}\,,\ a(x) > 0\,,\ x \in R\,,\ x \neq 0\,,\ t \in R\,, \tag{12}$$

$$U\big|_{t<0} \equiv 0\,, \tag{13}$$

$$[U]_{x=0} = 0\,,\ [U_x]_{x=0} = \alpha \cdot \delta(t)\,, \tag{14}$$

зная дополнительную информацию о решении прямой задачи (12)–(14)

$$U(+0,t) = f(t)\,,\ t > 0\,. \tag{15}$$

В (12), (14) $a(x) = a^-,\ x < 0,\ a(x) = a^+(x),\ x > 0;\ a^-, \alpha$ — известные числовые значения, $[U]_{x=0} = \lim\limits_{x\to+0} U(x,t) - \lim\limits_{x\to-0} U(x,t)$, $[U_x]_{x=0} = \lim\limits_{x\to+0} U_x(x,t) - \lim\limits_{x\to-0} U_x(x,t)$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Схема и метод исследования обратной задачи (12)–(15) в основном аналогичны вышеизложенному методу решения обратной задачи (1)–(3), поэтому у студентов не возникает трудностей в ее решении (см., например, [7; 20]).

Приобретенный опыт решения обратных задач для гиперболических уравнений типа (12)–(15) позволяет студентам решать более сложные обратные задачи, среди которых обратные задачи для системы уравнений Максвелла, конкретные постановки которых могут быть сведены к обратным задачам типа (12)–(15).

Для сокращенности записи изложим краткую схему построения дифференциального уравнения гиперболического типа из системы уравнений Максвелла, рассмотренной применительно к конкретной геофизической модели среды.

Рассматривается система уравнений Максвелла [20]:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \sigma \vec{E} + \vec{j}\,,\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}\,,\ t \in R\,,\ (x,y,z) \in R^3_- \cup R^3_+\,, \\ R^3_- = \{x \in R\,,\ y \in R\,,\ z < 0\},\ R^3_+ = \{x \in R\,,\ y \in R\,,\ z > 0\}. \end{gathered} \tag{16}$$

В (16) $\vec{E} = (E_x\,, E_y\,, E_z)$, $\vec{H} = (H_x\,, H_y\,, H_z)$ — вектор электрической и вектор магнитной напряженности электромагнитного поля соответственно; $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0,\ \mu = \mu(z) > 0$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\sigma = \sigma(z) \geq 0$ — проводимость среды; $\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$.

Система уравнений (16) рассматривается совместно с начальными условиями

$$\vec{E}\Big|_{t<0} \equiv 0\,,\ \vec{H}\Big|_{t<0} \equiv 0\,,\ \vec{j}\Big|_{t<0} \equiv 0 \qquad (17)$$

и условиям непрерывности

$$\begin{aligned} &E_x(x,y,+0,t) = E_x(x,y,-0,t)\,,\ E_y(x,y,+0,t) = E_y(x,y,-0,t)\,,\\ &H_x(x,y,+0,t) = H_x(x,y,-0,t)\,,\ H_y(x,y,+0,t) = H_y(x,y,-0,t)\,. \end{aligned} \qquad (18)$$

В (17) $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} h(x)\,\delta(z)\,\theta(t)$, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — тета-функция Хевисайда,

$$h(x) = \sum_{k=-N}^{N} h_k \exp(ikx)\,,\ h_{(-k)} = \overline{h_k}\,,\ i = \sqrt{-1}\,, \qquad (19)$$

Зависимость коэффициентов $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$ в уравнениях (16) только от переменной $z$ и вид импульсного источника $\vec{j}$ из (17) позволяют утверждать (см., например, [1]), что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ не зависят от переменной $y$ и

$$E_x = E_z = H_y = 0\,. \qquad (20)$$

Учитывая эти замечания, можно построить относительно $E_y$ дифференциальное уравнение гиперболического типа. Изложим краткую схему такого построения. Система уравнений Максвелла (16) может быть выписана шестью уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y = \varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial t}E_x + \sigma\cdot E_x\,,\ \frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y = -\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H_x\,,$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}H_z + \frac{\partial}{\partial z}H_x = \varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial t}E_y + \sigma\cdot E_y + h(x)\cdot\delta(z)\cdot\theta(t)\,,$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}E_z + \frac{\partial}{\partial z}E_x = -\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H_y\,,\ \frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x = -\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H_z\,,$$

из которых, учитывая (20), можно получить три уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H_x-\frac{\partial}{\partial z}E_y=0,\\
&\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H_z+\frac{\partial}{\partial x}E_y=0,\\
&-\frac{\partial}{\partial x}H_z+\frac{\partial}{\partial z}H_x=\varepsilon\cdot\frac{\partial}{\partial t}E_y+\sigma\cdot E_y+h(x)\cdot\delta(z)\cdot\theta(t).
\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

А из (21) относительно $E_y$ несложно получить гиперболическое уравнение

$$(\partial^2/\partial t^2)\,E_y-c^2(z)\,\Delta E_y=L_1(E_y)+f(x,z,t),\tag{22}$$

где

$$c(z)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)\cdot\mu(z)}},\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$L_1(E_y)=-\frac{\sigma(z)}{\varepsilon(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}E_y-\left(\frac{1}{\varepsilon(z)\cdot\mu^2(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\ \mu(z)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial z}E_y,$$

$$f(x,z,t)=-\frac{h(x)}{\varepsilon(z)}\cdot\delta(z,t)$$

Так как функция $h(x)$ имеет вид (19), то из уравнения (22) несложно получить $(2N+1)$ — дифференциальное уравнение гиперболического типа:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}U_k=c^2(z)\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}U_k-\frac{\sigma(z)}{\varepsilon(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}U_k-\frac{\mu'(z)}{\varepsilon(z)\cdot\mu^2(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial z}U_k-\\
&-c^2(z)\cdot k^2\cdot U_k-\frac{h_k}{\varepsilon(z)}\cdot\delta(z,t),\ k=-\overline{N,N}.
\end{aligned}\tag{23}$$

Допуская определенные условия на коэффициенты ε, μ, σ (рассматривая различные геофизические модели), из (23) можно получать простейшие уравнения типа (12) и в дальнейшем вместе со студентами формулировать модельные обратные задачи с последующим их исследованием.

В процессе выполнения таких учебных заданий студенты не только осваивают теорию обратных задач для дифференциальных уравнений, методологию исследования прикладных задач, но и приобретают новые знания в области прикладной математики и естествознания. Учебные обратные задачи обладают научно-образовательным потенциалом и являются дидактическими единицами усвоения содержания обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений.

### *Литература*


1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 502 с.
2. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач: учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
3. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи: учебник для студентов вузов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
4. *Комиссарова С.А.* Задачная технология как средство гуманитаризации естественнонаучного образования: дис. ... канд. пед. наук. Волгоград, 2002. 215 с.
5. *Корнилов В.С.* К вопросу о типовой программе по дисциплине «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2004. № 1 (2). С. 79–83.
6. *Корнилов В.С.* О междисциплинарном характере исследований причинно-следственных обратных задач // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2004. № 1 (2). С. 80–83.
7. *Корнилов В.С.* Некоторые обратные задачи идентификации параметров математических моделей: учебное пособие. М.: МГПУ, 2005. 359 с.
8. *Корнилов В.С.* Основы методической системы обучения дисциплине «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Самарского государственного экономического университета. Самара: СГЭУ, 2005. № 3 (18). С. 190–196.
9. *Корнилов В.С.* Реализация дидактических принципов обучения при использовании образовательных электронных ресурсов в курсе «Обратные задачи для дифференциальных уравнений» // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2006. № 1 (3). С. 40–44.
10. *Корнилов В.С.* Гуманитарные аспекты вузовской системы прикладной математической подготовки // Наука и школа. 2007. № 5. С. 23–28.
11. *Корнилов В.С.* Гуманитарный анализ математических моделей обратных задач // Известия Курского государственного технического университета. Курск: КГТУ, 2008. № 3 (24). С. 60–65.
12. *Корнилов В.С.* Роль гуманитарного потенциала обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в подготовке специалистов по прикладной математике // Проблемы гуманитаризации образования в малых городах: теория, практика и перспективы: материалы Международной научно-практической конференции (г. Коряжма, 21–22 октября 2010 г.). Коряжма: ПГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. С. 411–417.
13. *Корнилов В.С.* Обратные задачи в учебных дисциплинах прикладной математики // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2014. № 1 (27). С. 60–68.
14. *Корнилов В.С.* Экологическая составляющая гуманитарного потенциала обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Традиции гуманизации в образовании: сборник материалов III Международной конференции памяти Г.В. Дорофеева (Москва, 23 июня 2014 г.). М.: ИСМО РАО, 2014. С. 63–65.
15. *Корнилов В.С.* Формирование фундаментальных знаний будущих учителей информатики и математики по функциональному анализу при обучении обратным задачам математической физики // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2015. № 3 (33).

С. 72–82.

16. *Корнилов В.С.* Обучение студентов обратным задачам математической физики как фактор формирования фундаментальных знаний по интегральным уравнениям // Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации: рецензируемый сборник научных трудов. Т. VI. Самара: Самарский филиал МГПУ, 2015. С. 251–257.

17. *Корнилов В.С.* Базовые понятия информатики в содержании обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». 2016. № 1. С. 70–84.

18. *Корнилов В.С.* Реализация методов вычислительной математики при обучении студентов обратным задачам для дифференциальных уравнений // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия «Информатика и информатизация образования». 2016. № 2 (36). С. 91–100.

19. *Лаврентьев Г.В.* Гуманитаризация математического образования: проблемы и перспективы. Барнаул: Изд-во АГУ, 2001. 206 с.

20. *Подласый И.П.* Педагогика: 100 вопросов — 100 ответов: учебное пособие для вузов. М.: ВЛАДОС-пресс, 2004. 365 с.

21. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.

22. *Самарский А.А., Вабишевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: УРСС, 2004. 478 с.

23. *Сластенин В.А.* Педагогика профессионального образования. М.: Академия, 2007. 368 с.

## *Literatura*

1. *Brexovskix L.M.* Volny’ v sloisty’x sredax. M.: AN SSSR, 1957. 502 s.

2. *Denisov A.M.* Vvedenie v teoriyu obratny’x zadach: uchebnoe posobie. M.: Izd-vo MGU, 1994. 207 s.

3. *Kabanixin S.I.* Obratny’e i nekorrektny’e zadachi: uchebnik dlya studentov vuzov. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel’stvo, 2009. 458 c.

4. *Komissarova S.A.* Zadachnaya texnologiya kak sredstvo gumanitarizacii estestvennonauchnogo obrazovaniya: dis. ... kand. ped. nauk. Volgograd, 2002. 215 c.

5. *Kornilov V.S.* K voprosu o tipovoj programme po discipline «Obratny’e zadachi dlya differencial’ny’x uravnenij» // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2004. № 1 (2). S. 79–83.

6. *Kornilov V.S.* O mezhdisciplinarnom xaraktere issledovanij prichinno-sledstvenny’x obratny’x zadach // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2004. № 1 (2). S. 80–83.

7. *Kornilov V.S.* Nekotory’e obratny’e zadachi identifikacii parametrov matematicheskix modelej: uchebnoe posobie. M.: MGPU, 2005. 359 s.

8. *Kornilov V.S.* Osnovy’ metodicheskoj sistemy’ obucheniya discipline «Obratny’e zadachi dlya differencial’ny’x uravnenij» // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo e’konomicheskogo universiteta. Samara: SGE’U, 2005. № 3 (18). S. 190–196.

9. *Kornilov V.S.* Realizaciya didakticheskix principov obucheniya pri ispol’zovanii obrazovatel’ny’x e’lektronny’x resursov v kurse «Obratny’e zadachi dlya differencial’ny’x uravnenij» // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby’ narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2006. № 1 (3). S. 40–44.

10. *Kornilov V.S.* Gumanitarny'e aspekty' vuzovskoj sistemy' prikladnoj matematicheskoj podgotovki // Nauka i shkola. 2007. № 5. S. 23–28.

11. *Kornilov V.S.* Gumanitarny'j analiz matematicheskix modelej obratny'x zadach // Izvestiya Kurskogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta. Kursk: KGTU, 2008. № 3 (24). S. 60–65.

12. *Kornilov V.S.* Rol' gumanitarnogo potenciala obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij v podgotovke specialistov po prikladnoj matematike // Problemy' gumanitarizacii obrazovaniya v maly'x gorodax: teoriya, praktika i perspektivy': materialy' Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii (g. Koryazhma, 21–22 oktyabrya 2010 g.). Koryazhma: PGU im. M.V. Lomonosova, 2010. S. 411–417.

13. *Kornilov V.S.* Obratny'e zadachi v uchebny'x disciplinax prikladnoj matematiki // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2014. № 1 (27). S. 60–68.

14. *Kornilov V.S.* E'kologicheskaya sostavlyayushhaya gumanitarnogo potenciala obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Tradicii gumanizacii v obrazovanii: sbornik materialov III Mezhdunarodnoj konferencii pamyati G.V. Dorofeeva (Moskva, 23 iyunya 2014 g.). M.: ISMO RAO, 2014. S. 63–65.

15. *Kornilov V.S.* Formirovanie fundamental'ny'x znanij budushhix uchitelej informatiki i matematiki po funkcional'nomu analizu pri obuchenii obratny'm zadacham matematicheskoj fiziki // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2015. № 3 (33). S. 72–82.

16. *Kornilov V.S.* Obuchenie studentov obratny'm zadacham matematicheskoj fiziki kak faktor formirovaniya fundamental'ny'x znanij po integral'ny'm uravneniyam // Byulleten' laboratorii matematicheskogo, estestvennonauchnogo obrazovaniya i informatizacii: recenziruemy'j sbornik nauchny'x trudov. T. VI. Samara: Samarskij filial MGPU, 2015. S. 251–257.

17. *Kornilov V.S.* Bazovy'e ponyatiya informatiki v soderzhanii obucheniya obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby' narodov. Seriya «Informatizaciya obrazovaniya». 2016. № 1. S. 70–84.

18. *Kornilov V.S.* Realizaciya metodov vy'chislitel'noj matematiki pri obuchenii studentov obratny'm zadacham dlya differencial'ny'x uravnenij // Vestnik Moskovskogo gorodskogo pedagogicheskogo universiteta. Seriya «Informatika i informatizaciya obrazovaniya». 2016. № 2 (36). S. 91–100.

19. *Lavrent'ev G.V.* Gumanitarizaciya matematicheskogo obrazovaniya: problemy' i perspektivy'. Barnaul: Izd-vo AGU, 2001. 206 s.

20. *Podlasy'j I.P.* Pedagogika: 100 voprosov — 100 otvetov: uchebnoe posobie dlya vuzov. M.: VLADOS-press, 2004. 365 s.

21. *Romanov V.G.* Obratny'e zadachi matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1984. 264 s.

22. *Samarskij A.A., Vabishevich P.N.* Chislenny'e metody' resheniya obratny'x zadach matematicheskoj fiziki. M.: URSS, 2004. 478 c.

23. *Slastenin V.A.* Pedagogika professional'nogo obrazovaniya. M.: Akademiya, 2007. 368 s.

***V.S. Kornilov***

**Methodical Approach for Structuring Content of the Teaching Inverse Problems for Differential Equations**

The article sets out the scientific and methodical aspects of the formation of the content of the special training courses, devoted to inverse problems for differential equations and which are addressed to university students of physics and mathematical and natural-science directions of training. For illustrative purposes, the author provides settings of educational inverse problems for hyperbolic equations with setting out mathematical methods for solving them.

*Keywords:* inverse problem for differential equations; methods of mathematical physics; structuring of content of education; student.