

**С.Г. Григорьев,
А.Р. Есаян**

Выдвижение, экспериментальная проверка и доказательство гипотез в GeoGebra¹

В статье демонстрируется возможность построения динамических моделей в системе *GeoGebra*, превращающая ее в подобие творческой мастерской, работа в которой позволяет учащимся самостоятельно открывать известные факты, формулировать новые геометрические закономерности, а иногда и проводить строгое компьютерное доказательство выдвинутых гипотез.

Ключевые слова: *GeoGebra*; динамическая модель; коника; инварианты; *Mathcad Prime*; *Maxima*.

Эксперименты с созданными в *GeoGebra* динамическими моделями могут подсказать решение не только стандартных геометрических задач, но и способствуют выдвижению разнообразных гипотез, а также позволяют опровергать утверждения, кажущиеся на первый взгляд вполне естественными и правдоподобными. Использование же символьных вычислений в ряде случаев помогает проведению строгих (компьютерных) доказательств теоретических утверждений. Система *GeoGebra* дает возможность ученику задавать себе вопросы, фантазировать, выдвигать и проверять идеи, способствуя развитию творческого потенциала личности, что в конечном счете и является целью современного образования.

Естественно, что любая выдвинутая гипотеза в дальнейшем нуждается или в доказательстве, превращаясь таким путем в научный факт, или в опровержении. Доказательство может быть только строго математическим и может идти или без использования, или с использованием средств систем символьных (аналитических) вычислений. Опровержение гипотезы может задаваться контрпримером, построенным с помощью той же самой динамической модели, которая и позволила ее сформулировать. Если эксперименты с моделью

¹ Статья написана в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования Российской академии образования» на 2017–2019 годы (№ 27.6122.2017/БЧ).

по поиску контрпримеров к успеху не приводят, то мы получаем косвенное обоснование (подтверждение) выдвинутой гипотезы.

Первая сложная математическая проблема, доказанная с помощью компьютера, — это проблема четырех красок. Данное в 1976 г. К. Аппелем и В. Хакеном решение этой проблемы было весьма громоздким и занимало несколько сотен страниц². Впоследствии разными авторами было получено несколько более простых, но также компьютерных доказательств проблемы четырех красок. В настоящее время мы являемся свидетелями медленного, но кардинального изменения представлений о перспективах использования систем компьютерной математики с символьными вычислениями для доказательства тех или иных утверждений. Важным направлением дидактических исследований становится разработка конкретных содержательных примеров подобных доказательств, которые бы легко понимались читателями с разным уровнем математической и информационной подготовки. Отметим, что решение одной и той же задачи в нескольких системах, во-первых, уменьшает риск получения ошибочных результатов, а во-вторых, позволяет лучше понять возможности каждой из используемых систем. И хотя выбор той или иной системы компьютерной математики для проведения символьных вычислений — дело вкуса, привычки и возможностей доступа пользователя к этим системам, большинство из них выстраивают предпочтения «от большего к меньшему» в следующем порядке: *Mathematica*, *Maple*, *Mathcad Prime*, *Maxima* и *GeoGebra*. При этом не следует забывать, что *Mathematica*, *Maple* и *Mathcad Prime* — дорогостоящие коммерческие программные продукты, а *Maxima* и *GeoGebra* — свободно распространяемые системы, но в *GeoGebra* символьные вычисления пока развиты недостаточно. Можно с уверенностью утверждать, что в ближайшее время качественная подготовка учителей математики и информатики обязана будет включать в себя формирование их компетентности в области компьютерного доказательства утверждений с использованием систем символьных вычислений. Именно с указанных выше позиций и стоит рассматривать компьютерные доказательства выдвигаемых гипотез, а также экспериментальное подтверждение или опровержение таких гипотез.

1. Гипотезы λ LS3 и λ LS4. Ниже будем использовать ряд понятий, введенных в [1]. В частности, из [1] взяты и определения 1 и 2.

Определение 1. Пусть задан невырожденный отрезок AB и l ($0 < l < \infty$, $l \neq 1$, $l \neq 1/2$) — действительное число. Будем говорить, что отрезок AB точками D и E подвергнут l -секции, если $AD / AB = BE / AB = l$ (здесь AD , BE , AB — длины отрезков). Точки деления D и E будем называть l -точками (см. рис. 1 а, б).

Реализовать l -секцию отрезка AB , то есть найти точки D и E можно по простым формулам: $D = (1 - l) \cdot A + l \cdot B$, $E = (1 - l) \cdot B + l \cdot A$. Условия $l \neq 1$ и $l \neq 1/2$ гарантируют, что l -точки D и E не совпадают друг с другом и не совпадают с концами отрезка.

² Проблема четырех красок // Википедия — свободная энциклопедия. — URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Проблема_четырёх_красок

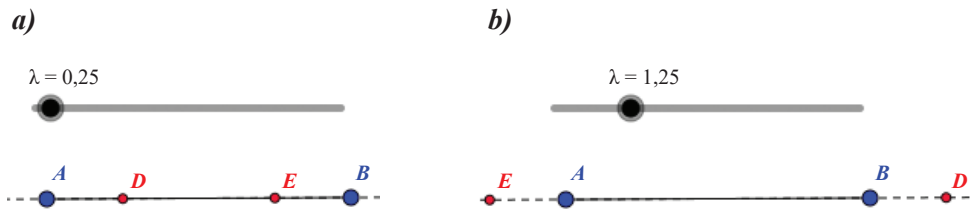


Рис. 1. Иллюстрации к λ -секции отрезка ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1/2$, $\lambda \neq 1$)

Определение 2. Пусть задан невырожденный $\triangle ABC$ и 1 ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 1/2$) — действительное число. Будем говорить, что осуществлена λ -секция сторон $\triangle ABC$, если она проведена для каждой из его сторон, причем необязательно при одинаковых значениях λ , и в полученные λ -точки из противоположных вершин проведены чевианы (прямые, лучи).

При λ -секции сторон треугольника приходится иметь дело с точками пересечения чевиан или их продолжений друг с другом, а также с точками пересечения чевиан со сторонами исходного треугольника или их продолжениями. Среди этих точек нас будут интересовать граничные точки, α -точки и точки, связанные со сторонами треугольника [1]. Не вводя соответствующих понятий, поясним их на конкретных примерах. На рисунке 2 a, b точки G, F, E, D, I и H являются граничными, а точки J, O, N, M, L и K — α -точками. Иными словами, граничные точки — это фактически λ -точки.

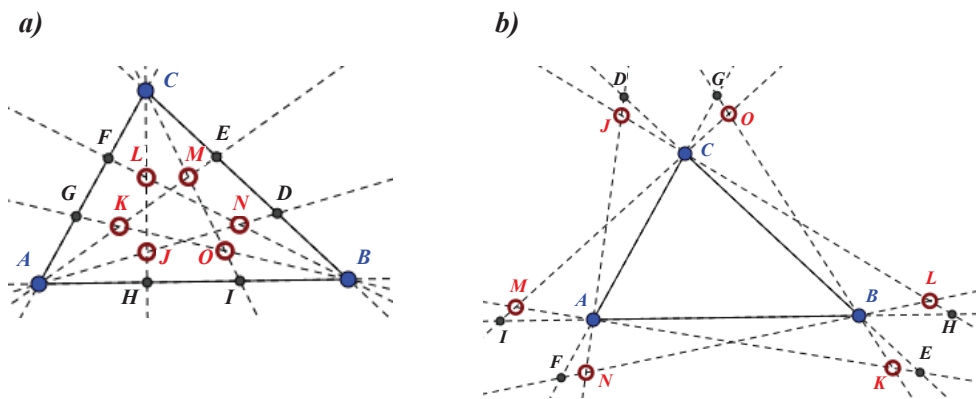


Рис. 2. Граничные точки и α -точки при λ -секции сторон треугольника

Пришла пора сформулировать обозначенные в заголовке пункта гипотезы $\lambda LS3$ и $\lambda LS4$. В последующих пунктах они будут экспериментально обоснованы с помощью соответствующих динамических моделей, а гипотеза $\lambda LS3$ будет переведена в доказанное утверждение.

Гипотеза $\lambda LS3$. Если λ -секция каждой стороны невырожденного $\triangle ABC$ выполнена при одном и том же значении λ ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 1/2$), то шестерка граничных точек лежит на одном эллипсе (см. рис. 3 a, b).

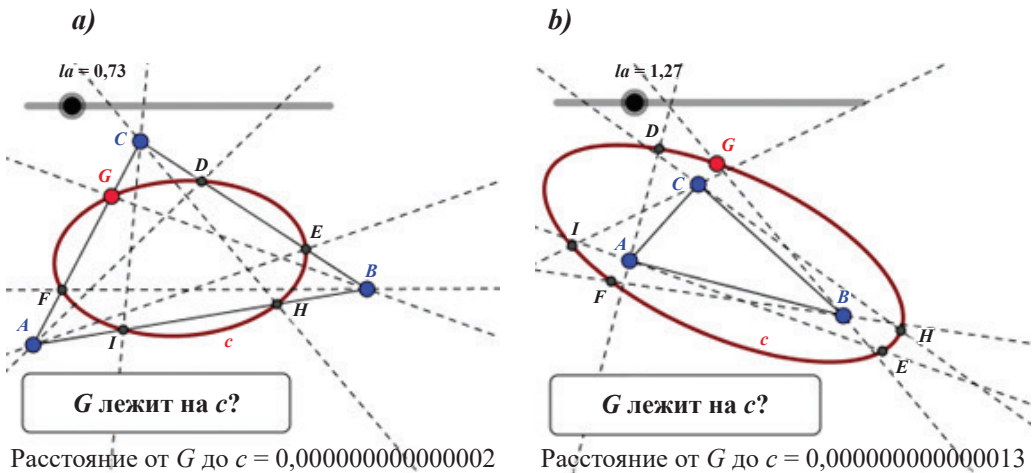


Рис. 3. Состояния динамической модели для проверки гипотезы $\lambda LS3$

Гипотеза $\lambda LS4$. Если λ -секция каждой стороны невырожденного ΔABC выполнена при одном и том же значении λ ($0 < \lambda < \infty, \lambda \neq 1, \lambda \neq 1/2$), то шестерка α -точек лежит на одном эллипсе (см. рис. 4 a, b).

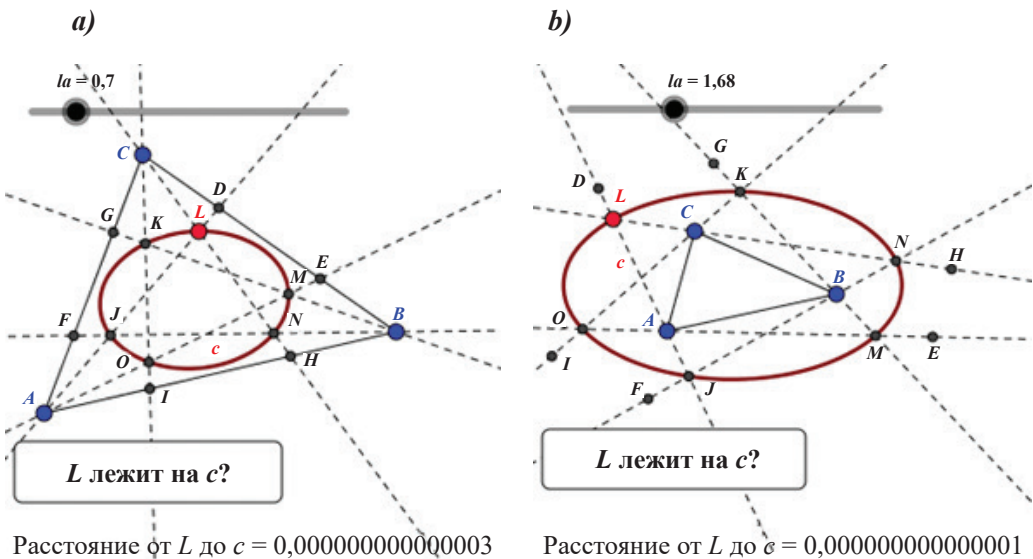


Рис. 4. Состояния динамической модели для проверки гипотезы $\lambda LS4$






В следующем пункте будут построены динамические модели для экспериментальной проверки справедливости гипотез $\lambda LS3$ и $\lambda LS4$. Сейчас же отметим следующие обстоятельства:

- 1) Доказательство того, что шестерка точек в гипотезе $\lambda SL3$ лежит на одной конике, непосредственно вытекает из теоремы Карно, и его можно найти,

например, здесь³. Далее, в пунктах 3 и 4 с использованием символьных вычислений в системе *Mathcad Prime* (*Maple*, *Mathematica* и *Maxima*) будет доказано более сильное утверждение, а именно, что упомянутая коника является эллипсом. Иными словами, гипотеза $\lambda SL3$ будет переведена в доказанное утверждение.

- 2) Из справедливости $\lambda SL3$ и утверждения теоремы 1⁴ вытекает, что шестерка точек в условиях $\lambda SL4$ лежит на одной конике, а то, что эта коника является эллипсом, экспериментально подтверждается при работе с динамической моделью, представленной на рисунке 4 *a, b*.




2. Динамические модели для проверки гипотез $LS3$ и $\lambda LS4$. Динамическую модель для экспериментальной проверки гипотезы $\lambda LS3$ можно построить следующей последовательностью действий:

- инструментом  «Точка» поместим на полотно окна точки A , B и C . Инструментом  «Отрезок» проведем отрезки AB , BC и CA ;
- инструментом  «Ползунок» сформируем соответствующий управляющий элемент с такими характеристиками: имя — λ , минимальное значение — 0, максимальное значение — 5, текущее значение — 0,25;
- проведем λ -секцию стороны BC $\triangle ABC$. Для этого через строку ввода сформируем λ -точки $D = (1 - \lambda) \cdot B + \lambda \cdot C$ и $E = (1 - \lambda) \cdot C + \lambda \cdot B$ и затем инструментом  «Прямая» проведем прямые через вершину A и полученные точки;
- спрячем имена всех отрезков, а у прямых AD и AE изменим стиль вывода на штриховой. Аналогичным образом можно было бы провести λ -секцию и других сторон $\triangle ABC$. Но на данном этапе построения модели практически уже все готово для создания нового пользовательского инструмента для проведения λ -секции сторон треугольника, который, впрочем, можно будет использовать и в других задачах. В следующем пункте показано, как такой инструмент может быть создан;
- через меню командой «Инструменты/Создать инструмент» откроем окно «Создать инструмент» и в нем реализуем такие операции. На вкладке «Выходные объекты» сформируем список выходных объектов: точки E и D и штриховые прямые i и j . На вкладке «Входные объекты» сформируем список входных объектов: точки A , B и C и число λ (там они уже указаны). На вкладке «Имя и значок» назначим: имя инструменту — *laseqseg*, имя соответствующей инструменту команде — *laseqseg*, имя файлу пиктограммы на кнопке инструмента — *laseqseg.png* и, кроме того, зададим описание для всплывающей подсказки — « A, B, C (A — вершина, BC — сторона)». После нажатия на кнопку «Ок» новый инструмент будет создан, и на панели инструментов он будет представлен кнопкой вида .

³ Григорьев Д. О некоторых кониках, связанных с треугольником / Науч. рук.ов.: А.А. Привалов // Официальный сайт Московского центра непрерывного математического образования. – URL: <http://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2013/grigoriev.pdf>


⁴ *Drach Kostiantyn*. Conics associated with triangle, or how Poncelet meets Morley // Cornell University Library. – URL: <https://arxiv.org/pdf/1410.4574v1.pdf>

В текущей сессии инструмент готов к работе. Чтобы им можно было пользоваться и в других сессиях, в том числе и при открытии новых файлов, через меню следует выполнить команду «*Настройки/Сохранить настройки*». Чтобы данный инструмент можно было внедрять в другие существующие документы, следует через меню командой «*Инструменты/Управление инструментами*» открыть окно «*Управление инструментами*» и создать файл *laseqseg.ggt*. Для работы с новым инструментом требуется активировать его щелчком по соответствующей кнопке и последовательно в направлении против часовой стрелки щелкнуть по точкам *A*, *B* и *C*, где *A* — вершина, противолежащая стороне *BC*, подвергающейся λ -секции. После этого требуется задать значение величины λ ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1/2$, $\lambda \neq 1$);

- теперь мы можем использовать созданный инструмент для λ -секции остальных сторон $\triangle ABC$. Сделаем это. Инструментом  « *λ -секция сторон*» сначала проведем λ -секцию стороны *CA* (щелчки по точкам *B*, *C*, *A* и ввод λ), а затем λ -секцию стороны *AB* (щелчки по точкам *C*, *A*, *B* и ввод λ). Для λ требуется использовать одинаковые для всех сторон значения: $0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1/2$, $\lambda \neq 1$;
- изменим стиль вывода точки *G* (цвет, размер). Инструментом  «*Коника по пяти точкам*» проведем конику *c* через точки *D*, *E*, *F*, *I* и *H*. Эта коника оказалась эллипсом, на котором, по-видимому, лежит и шестая точка *G*. Увеличим толщину линии *c* и изменим ее цвет;
- инструментом  «*Текст*» сформируем текстовый объект вида:

$$\text{Расстояние от } G \text{ до } c = \boxed{\text{Distance}[G, c]}, \quad (1)$$

переменная часть которого в режиме реального времени будет информировать нас о текущем расстоянии от точки *G* до эллипса *c*. Округление следует установить с 15 разрядами после десятичной точки;

- инструментом  «*Кнопка*» выведем на полотно кнопку общего назначения с надписью «*G* лежит на *c*?» и назначим ей скрипт *Relation [G, c]*. Щелчки по этой кнопке будут запускать скрипт и выводить сообщения, подтверждающие или опровергающие размещение точки *G* на *c* («*G* лежит на *c*» или «*G* не лежит на *c*»). Заметим, что вычисления по кнопкам организуются более точно, чем в переменных частях текстовых объектов типа (1).

Динамическая модель для проверки гипотезы $\lambda LS3$ построена (см. рис. 3 *a*, *b*). Свободными в ней являются точки *A*, *B* и *C*. По аналогии с моделью для экспериментальной проверки гипотезы $\lambda LS3$ строится и модель для экспериментальной проверки гипотезы $\lambda LS4$ (см. рис. 4 *a*, *b*). При проверке гипотез $\lambda LS3$, $\lambda LS4$ ползунком можно менять значение λ , а перемещением свободных точек *A*, *B* и *C* — позицию и форму $\triangle ABC$. При этом текстовые объекты (1) во всех случаях будут показывать значащую цифру лишь на 15 позиции после десятичной точки, а при щелчках по кнопке общего назначения всегда будет выводиться панель

с сообщением « G лежит на c ». Все это и дает нам возможность считать гипотезы $\lambda LS3$ и $\lambda LS4$ экспериментально обоснованными.

Замечание. Из граничных точек и α -точек можно составить еще много различных шестерок точек, которые при любой λ -секции ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 1/2$) сторон $\triangle ABC$ предположительно располагаются на одном эллипсе. На рисунке 5 *a-c* приведены примеры таких шестерок. На рисунке 5 *a* эллипс проведен через пару граничных точек D и E стороны AB и тройку α -точек O , N и P . При этом α -точка J , по-видимому, также оказывается на этом эллипсе. На рисунке 5 *b* эллипс проведен через пару граничных точек D и E стороны AB , пару граничных точек F и G стороны BC и α -точку O . При этом α -точка J , по-видимому, также оказывается на этом эллипсе. На рисунке 5 *c* эллипс проведен через пару граничных точек D и E стороны AB , пару граничных точек F и G стороны BC и α -точку N . При этом α -точка K , по-видимому, также оказывается на этом эллипсе.

Экспериментальная проверка утверждений, модели для которых показаны на рисунке 5 *a-c*, организуется тем же способом, что и проверка гипотез $\lambda LS3$ и $\lambda LS4$. Опровержения этих утверждений при экспериментах не получено.

3. Общая схема доказательства теоремы $\lambda LS3$. Попытаемся теперь перевести гипотезу $\lambda LS3$ в доказанное утверждение.

Теорема $\lambda LS3$. Если λ -секция каждой стороны невырожденного $\triangle ABC$ выполнена при одном и том же значении λ ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 1/2$), то шестерка λ -точек лежит на одном эллипсе (см. рис. 3 *a, b*).

Пусть x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 и y_3 — координаты вершин исходного треугольника: $A = A(x_1, y_1)$, $B = B(x_2, y_2)$ и $C = C(x_3, y_3)$ и λ ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 1/2$) — действительное число. Тогда координаты граничных точек D, E, F, G, I и H при λ -секции сторон $\triangle ABC$ зависят от 7 параметров — шести координат вершин треугольника и величины λ . Дальнейшая работа с величинами, связанными с этими параметрами, представляется не совсем простой и, по крайней мере, весьма громоздкой. Однако при проведении доказательства теоремы можно считать выполненными такие условия. Вершина A расположена в начале системы координат, то есть имеет координаты $A(0, 0)$. Этому всегда можно добиться преобразованием параллельного переноса. Далее, сторона AB $\triangle ABC$ расположена на оси абсцисс, то есть вершина B имеет координаты $B(W, 0)$ ($W \neq 0$). Этому всегда можно добиться преобразованием поворота. А координаты вершины пусть будут $C = C(U, V)$.

Таким образом, можно считать, что координаты точек D, E, F, G, I и H задаются выражениями, зависящими всего лишь от четырех параметров U, V, W и l . Получить эти координаты можно по формулам, которые выписаны справа на рисунке 6. При этом из невырожденности исходного треугольника следует, что $V \neq 0$.

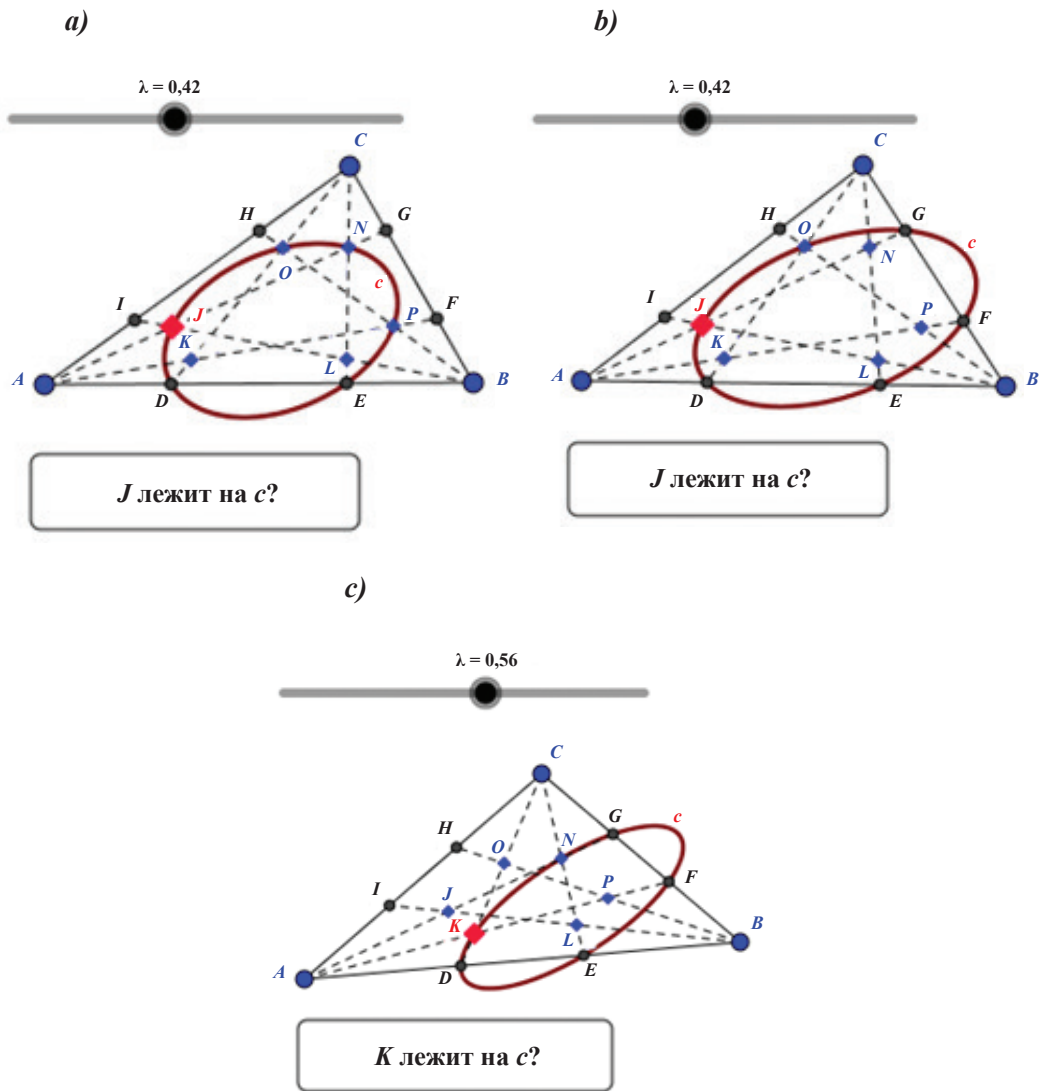
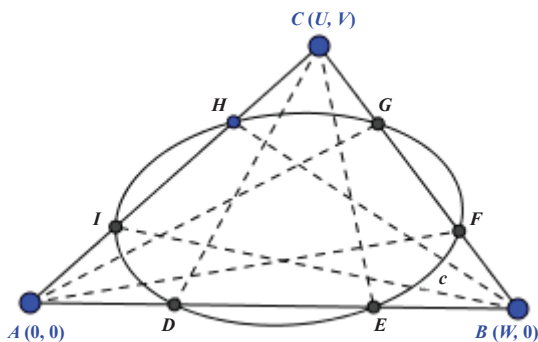


Рис. 5. Динамические модели для проверки утверждений из Замечания



$$\begin{aligned}
 p &= \lambda, q = 1 - \lambda, p + q = 1, \\
 p &> 0, q \neq 0. \\
 D &= D(q \cdot W, 0), \\
 E &= E(p \cdot W, 0), \\
 F &= F(p \cdot W + q \cdot U, q \cdot V), \\
 G &= G(p \cdot U + q \cdot W, q \cdot V), \\
 I &= I(q \cdot U, q \cdot V), \\
 H &= H(p \cdot U, p \cdot V),
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Координаты граничных точек при λ -секции сторон треугольника

Покажем, что граничные точки D, E, F, G, H и I лежат на одной конике

$$a \cdot x^2 + b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot x + e \cdot y - f = 0, \quad (2)$$

и эта коника является эллипсом. Для этого, прежде всего, необходимо показать, что система шести алгебраических линейных однородных уравнений с шестью неизвестными a, b, c, d, e и f , полученная подстановкой координат граничных точек в (1), имеет решение и притом единственное.

Итак, рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a \cdot (p \cdot W)^2 + d \cdot p \cdot W - f = 0, \\ a \cdot (q \cdot W)^2 + d \cdot q \cdot W - f = 0, \\ a \cdot (p \cdot W + q \cdot U)^2 + b \cdot (p \cdot W + q \cdot U) \cdot q \cdot V + c \cdot (q \cdot V)^2 + d \cdot (p \cdot W + q \cdot U) + e \cdot q \cdot V - f = 0, \\ a \cdot (q \cdot W + p \cdot U)^2 + b \cdot (q \cdot W + p \cdot U) \cdot p \cdot V + c \cdot (p \cdot V)^2 + d \cdot (q \cdot W + p \cdot U) + e \cdot p \cdot V - f = 0, \\ a \cdot (q \cdot U)^2 + b \cdot (q \cdot U) \cdot (q \cdot V) + c \cdot (q \cdot V)^2 + d \cdot (q \cdot U) + e \cdot (p \cdot V) - f = 0, \\ a \cdot (p \cdot U)^2 + b \cdot (p \cdot U) \cdot (p \cdot V) + c \cdot (p \cdot V)^2 + d \cdot (p \cdot U) + e \cdot (p \cdot V) - f = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Выпишем матрицу коэффициентов системы (3):

$$\begin{pmatrix} (q \cdot W)^2 & 0 & 0 & q \cdot W & 0 & -1 \\ (p \cdot W)^2 & 0 & 0 & p \cdot W & 0 & -1 \\ (p \cdot W + q \cdot U)^2 & (p \cdot W + q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & p \cdot W + q \cdot W & q \cdot V & -1 \\ (q \cdot W + p \cdot U)^2 & (q \cdot W + p \cdot U) \cdot (p \cdot V) & (p \cdot V)^2 & q \cdot W + p \cdot W & p \cdot V & -1 \\ (q \cdot U)^2 & (q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & q \cdot U & q \cdot V & -1 \\ (p \cdot U)^2 & (p \cdot U) \cdot (p \cdot V) & (p \cdot V)^2 & p \cdot U & p \cdot V & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Чтобы однородная линейная система (3) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель матрицы (4) был равен нулю. Данную проверку и все последующие вычисления продолжим в одной из систем компьютерной математики с развитыми символьными вычислениями. Ниже показано, как это делается в системе *Mathcad Prime* [3], хотя реально вычисления были также проведены и в системах *Maple*, *Maxima* и *Mathematica* [4–8].

4. Доказательство теоремы $\lambda LS3$ в *Mathcad Prime*. На рисунке 7 приведен фрагмент документа в *Mathcad Prime* (ver. 3.1) с символьными вычислениями, завершающими доказательство теоремы $\lambda LS3$. Отдельные шаги предпринятых вычислений и соответствующие им действия кратко описаны в самом документе. Поэтому в пояснении, по-видимому, нуждается лишь пункт 7, где по инвариантам S, δ и Δ [9: с. 41] проверяется, что кривая (2) является эллипсом. На этом и остановимся. Нам требуется убедиться, что при действительных значениях

Доказательство теоремы $\lambda LS3$ (система Mathcad Prime, v. 3.1)1. Выписывается матрица ma коэффициентов однородной системы

$$ma := \begin{bmatrix} (q \cdot W)^2 & 0 & 0 & q \cdot W & 0 & -1 \\ (p \cdot W)^2 & 0 & 0 & p \cdot W & 0 & -1 \\ (p \cdot W + q \cdot U)^2 & (p \cdot W + q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & p \cdot W + q \cdot U & q \cdot V & -1 \\ (q \cdot W + p \cdot U)^2 & (q \cdot W + p \cdot U) \cdot (p \cdot V) & (p \cdot V)^2 & q \cdot W + p \cdot U & p \cdot V & -1 \\ (q \cdot U)^2 & (q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & q \cdot U & q \cdot V & -1 \\ (p \cdot U)^2 & (p \cdot U) \cdot (p \cdot V) & (p \cdot V)^2 & p \cdot U & p \cdot V & -1 \end{bmatrix}$$

2. Подсчитывается определитель матрицы ma

$$\det(ma) \xrightarrow{\text{simplify, factor}} 0$$

3. Формируется матрица и свободный член "усеченной" системы

(Полагается $f=-1$, удаляется из ma 6 строка, а 6 столбец переносится вправо. Составляется матрица системы, вычисляется ее определитель и ранг.

$$ms := \begin{bmatrix} (q \cdot W)^2 & 0 & 0 & q \cdot W & 0 \\ (p \cdot W)^2 & 0 & 0 & p \cdot W & 0 \\ (p \cdot W + q \cdot U)^2 & (p \cdot W + q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & p \cdot W + q \cdot U & q \cdot V \\ (q \cdot W + p \cdot U)^2 & (q \cdot W + p \cdot U) \cdot (p \cdot V) & (p \cdot V)^2 & q \cdot W + p \cdot U & p \cdot V \\ (q \cdot U)^2 & (q \cdot U) \cdot (q \cdot V) & (q \cdot V)^2 & q \cdot U & q \cdot V \end{bmatrix} \quad bs := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(ms) \xrightarrow[\text{substitute, } p=\lambda, q=1-\lambda]{\text{simplify}} V^4 \cdot W^4 \cdot \lambda^3 \cdot (\lambda-1)^3 \cdot (2 \cdot \lambda-1)^2$$

Поскольку треугольник невырожденный, то $W \neq 0$, $V \neq 0$. Кроме того, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Таким образом, определитель ms не равен нулю при любых значениях параметров, и усеченная система имеет и притом единственное решение.

$$\text{rank}(ms) \rightarrow 5$$

4. Находится решение усеченной системы уравнений (двумя способами)

$$ot := ms^{-1} \cdot bs \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{W^2 \cdot p \cdot q}{W - 2 \cdot U} \\ \frac{V \cdot W^2 \cdot p \cdot q}{U^2 - U \cdot W + W^2} \\ \frac{V^2 \cdot W^2 \cdot p \cdot q}{p + q} \\ \frac{W \cdot p \cdot q}{(U - W) \cdot (p + q)} \\ \frac{(U - W) \cdot (p + q)}{V \cdot W \cdot p \cdot q} \end{bmatrix}$$

Рис. 7. Код доказательства теоремы $\lambda LS3$ в системе Mathcad Prime

Продолжение Рисунка 7

$$ls := \text{lsolve}(ms, bs) \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{W^2 \cdot p \cdot q}{W - 2 \cdot U} \\ \frac{V \cdot W^2 \cdot p \cdot q}{U^2 - U \cdot W + W^2} \\ \frac{V^2 \cdot W^2 \cdot p \cdot q}{p + q} \\ \frac{W \cdot p \cdot q}{(U - W) \cdot (p + q)} \\ \frac{(U - W) \cdot (p + q)}{V \cdot W \cdot p \cdot q} \end{bmatrix} \quad ot = ls \rightarrow 1$$

5. Выписывается решение исходной однородной системы уравнений (формируются коэффициенты коники)

$$a := ot_0 \rightarrow \frac{1}{W^2 \cdot p \cdot q} \quad b := ot_1 \rightarrow \frac{W - 2 \cdot U}{V \cdot W^2 \cdot p \cdot q} \quad c := ot_2 \rightarrow \frac{U^2 - U \cdot W + W^2}{V^2 \cdot W^2 \cdot p \cdot q}$$

$$d := ot_3 \rightarrow -\frac{p + q}{W \cdot p \cdot q} \quad e := ot_4 \rightarrow \frac{(U - W) \cdot (p + q)}{V \cdot W \cdot p \cdot q} \quad f := -1$$

6. Реализуется проверка решений усеченной и исходной систем уравнений

$$ms \cdot ot \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ma \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{simplify}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. По инвариантам проверяется, что найденная коника с коэффициентами a, b, c, d, e и f - это эллипс

$$S := a + c \quad \delta := \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2 \\ 2 & c \end{pmatrix} \quad \Delta := \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & -f \end{pmatrix}$$

$$S \xrightarrow{\text{simplify}} \frac{U^2 - U \cdot W + V^2 + W^2}{V^2 \cdot W^2 \cdot p \cdot q} \quad \delta \rightarrow \frac{3}{4 \cdot V^2 \cdot W^2 \cdot p^2 \cdot q^2}$$

$$\Delta \rightarrow -\frac{p^2 - p \cdot q + q^2}{4 \cdot V^2 \cdot W^2 \cdot p^3 \cdot q^3}$$

$$S \cdot \Delta \xrightarrow[\text{substitute, } p = \lambda, q = 1 - \lambda]{\text{simplify}} -\frac{(3 \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 1) \cdot (U^2 - U \cdot W + V^2 + W^2)}{4 \cdot V^4 \cdot W^4 \cdot \lambda^4 \cdot (\lambda - 1)^4}$$

Но $3 \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 1 > 0$ и $U^2 - U \cdot W + V^2 + W^2 > 0$.

Иными словами, условия $\delta > 0$ и $\Delta \cdot S < 0$, при которых коника есть эллипс, выполнены.

параметров U , W , V , p и q ($W \neq 0$, $V \neq 0$, $\lambda = p > 0$, $1 - \lambda = q \neq 0$) выполняются соотношения $\delta > 0$ и $S \cdot \Delta < 0$. Но из

$$\delta = \frac{3}{4 \cdot V^2 \cdot W^2 \cdot p^2 \cdot q^2}, \quad S \cdot \Delta = -\frac{(3 \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 1) \cdot (U^2 - U \cdot W + W^2 + V^2)}{4 \cdot V^4 \cdot W^3 \cdot \lambda^4 \cdot (1 - \lambda)^4}$$

следует, что $\delta > 0$. Ясно также, что $3 \cdot \lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 1$. Далее, если U и W имеют разные знаки, то $U^2 - U \cdot W + W^2 + V^2 > 0$. Если же U и W имеют одинаковые знаки, то $U^2 - U \cdot W + W^2 + V^2 = (U - W)^2 + U \cdot W + V^2 > 0$. Иными словами, во всех случаях выполняется и второе соотношение $S \cdot \Delta < 0$.

Литература

1. Абдуразаков М.М., Есаян А.Р., Ниматуллаев М.М. Динамические модели и экспериментальная проверка гипотез в GeoGebra // Современные образовательные Web-технологии в системе школьной и профессиональной подготовки: материалы Международной научно-практической конференции. Арзамас, 2017. С. 265–271.

2. Есаян А.Р. Создание новых инструментов в GeoGebra // Проблемы модернизации современного образования: монография. Калуга: Калужский государственный университет, 2016. С. 29–59.

3. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М., Якушин А.В., Абдуразаков М.М. РТС Mathcad Prime 3.1: монография. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2016. 400 с.

4. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М., Шулюпов В.А. Программирование в Maple. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2007. 334 с.

5. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М., Якушин А.В. Maxima. Данные и графика. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2011. 367 с.

6. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М., Якушин А.В. Maxima. Программирование в Maxima. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2012. 351 с.

7. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М. Творческая лаборатория Mathematica: Система, данные, графика: в 2 ч. Ч. 1. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2005. 296 с.

8. Есаян А.Р., Чубариков В.Н., Добровольский Н.М. Творческая лаборатория Mathematica. Программирование, функции алгебры и анализа. Тула: Изд-во Тульского госпедуниверситета им. Л.Н. Толстого, 2005. 258 с.

9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

Literatura

1. Abdurazakov M.M., Esayan A.R., Nimatullaev M.M. Dinamicheskie modeli i eksperimental'naya proverka gipotez v GeoGebra // Sovremennyye obrazovatel'ny'e Web-texnologii v sisteme shkol'noj i professional'noj podgotovki: materialy' Mezhdu narodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. Arzamas, 2017. S. 265–271.

2. Esayan A.R. Sozdanie novy'x instrumentov v GeoGebra // Problemy' modernizacii sovremennogo obrazovaniya: monografiya. Kaluga: Kaluzhskij gosudarstvenny'j universitet, 2016. S. 29–59.

3. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M., Yakushin A.V., Abdurazakov M.M.* PTC Mathcad Prime 3.1: monografiya. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2016. 400 s.
4. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M., Shulyupov V.A.* Programirovanie v Maple. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2007. 334 s.
5. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M., Yakushin A.V.* Maxima. Danny'e i grafika. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2011. 367 s.
6. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M., Yakushin A.V.* Maxima. Programirovanie v Maxima. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2012. 351 s.
7. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M.* Tvorcheskaya laboratoriya Mathematica: Sistema, danny'e, grafika: v 2 ch. Ch. 1. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2005. 296 s.
8. *Esayan A.R., Chubarikov V.N., Dobrovol'skij N.M.* Tvorcheskaya laboratoriya Mathematica. Programirovanie, funktsii algebry' i analiza. Tula: Izd-vo Tul'skogo gospeduniversiteta im. L.N. Tolstogo, 2005. 258 s.
9. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchny'x rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, 1968. 720 s.

S.G. Grigoriev,
A.R. Yesayan

Advancement, Experimental Verification and Proving of Hypotheses in GeoGebra⁵

The article demonstrates the possibility of constructing dynamic models in the *GeoGebra* system, which turns it into a kind of creative workshop, the work in which allows students to independently discover known facts, formulate new geometric patterns, and sometimes conduct rigorous computer proof of the hypotheses put forward.

Keywords: *GeoGebra*; dynamic model; conic; invariants; *Mathcad Prime*; *Maxima*.

⁵ The article was written in the framework of the state task of the Institute for the Strategy for the Development of Education of the Russian Academy of Education for 2017–2019 (№ 27.6122.2017 / BCh).